Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2010/2011

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (17. Dezember 2010)

Gruppe weiss *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— *Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1. Auf dem Weg zur Jungweinverkostung besteigt Reinhold Messner den Bisamberg. Der spiralförmige Verlauf seines Aufstiegs ist gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -5\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \pi t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Betrag von Reinholds Geschwindigkeit $|\mathbf{v}(t)|$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

b) Reinhold schießt zum Zeitpunkt $t = 0$ genau *gegen* seine Bewegungsrichtung eine Signalrakete ab. Der Betrag der Geschwindigkeit dieser Rakete ab dem Abschusszeitpunkt beträgt $|\mathbf{v}_{Rakete}| = 200$. Geben Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}_{Rakete}(t)$ an. Nehmen Sie eine geradlinige, gleichförmige Bewegung der Rakete an (keine Umwelteinflüsse wie Gravitation, Luftwiderstand, endliche Treibstoffmenge).

c) Die Ebene E sei die Normalebene auf den Tangentenvektor an Reinholds Bahnkurve zum Zeitpunkt $t = 4$ durch den Punkt $\mathbf{r}(4)$. Zu welchem Zeitpunkt t schneidet die Rakete diese Ebene?

d) Geben Sie den von Reinhold zurückgelegten Weg zwischen $t = 0$ und $t = 4$ an.

Hinweis: Substituieren Sie geeignet das Integral.

LÖSUNG

a)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -5\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -5\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{3}{2}\pi\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{v}(0)| = \frac{5\pi}{4}$$

b) Der Geschwindigkeitsvektor der Rakete entspricht einem Vektor parallel zum negativen (da "gegen die Bewegungsrichtung") Tangentialvektor von Reinholds Bahnkurve zur Zeit t=0 mit der Länge 200 (also $|\mathbf{v}_{Rakete}| = 200$).

Negativer Tangentialvektor zur Zeit t=0:

$$-\mathbf{r}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4}\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der zu diesem Vektor parallele Vektor mit der Länge 200 ist offensichtlich

$$\mathbf{v}_{Rakete} = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt für die Bahnkurve der Rakete

$$\mathbf{r}_{Rakete} = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}_{Rakete}\ t = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

c) Tangentenvektor und Ortsvektor von Reinhold zur Zeit t=4:

$$\mathbf{r}'(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4}\pi \\ 3\pi \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}(4) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 8\pi \end{pmatrix}$$

Ebene mit $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ ergibt $5y + 12z = 96\pi$. Schnittpunkt mit Ebene-Rakete: Wegen der Bewegungsgleichung der Rakete ergibt sich direkt $x = 5$ und $z = 0$. Einsetzen dieser Werte in die Ebenengleichung ergibt $y = \frac{96}{5}\pi$. Die Rakete erreicht diesen Punkt zur Zeit $200t = \frac{96}{5}\pi$, also $t = \frac{96}{1000}\pi = \frac{12}{125}\pi$.

d) Normale Berechnung der Bogenlänge:

$$S = \int_{t=0}^{4} ds = \int_{t=0}^{4} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \int_{t=0}^{4} dt \sqrt{\left(\frac{5}{4}\pi\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\pi\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 t}$$

$$= \int_{t=0}^{4} dt \sqrt{\left(\frac{5}{4}\pi\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 t} = \left\{ u = \left(\frac{5}{4}\pi\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 t,\ du = \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 dt \right\} = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \int_{t=0}^{4} du \sqrt{u} =$$

$$\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{t=0}^{4} = \frac{8}{27\pi^2} \left(\frac{25\pi^2}{16} + \frac{9\pi^2}{4} t\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{t=0}^{4} = \frac{8\pi}{27} \left[\left(\frac{25}{16} + 9\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4}\right)^3 \right] = \frac{8\pi}{27} \left[\left(\frac{13}{4}\right)^3 - \left(\frac{5}{4}\right)^3 \right]$$

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Feld

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy^3 - y\sin x \\ 6y^2x^2 + \cos x \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie als bekannt an, dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist.

a) Machen Sie sich die Tatsache, dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist, durch Überprüfen der Integrabilitätsbedingung plausibel.

b) Gegeben sind Punkte $P_1 = (0,1), P_2 = (1,1), P_3 = (1,2), P_4 = (0,2)$. Durch Zusammenfügen der geradlinigen Strecken $\overrightarrow{P_4P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ entsteht eine Kurve C von P_4 nach P_1 (*Skizze!*).

   i) Geben Sie eine Parametrisierung von C an.

   ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ entlang C.

c) Gegeben sei eine Kurve $\tilde{C}$ mit der Parametrisierung

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \; e^{\sqrt{\ln(t^2+1)+5}} \\ (t+\cos t)e^{t^3} - t(1-\frac{1}{\pi})e^{\pi^3} - \frac{2t}{\pi}\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\pi]$$

Berechnen Sie $\tilde{\mathbf{r}}(0)$ und $\tilde{\mathbf{r}}(\pi)$ und geben Sie den Wert des Kurvenintegrals von $\mathbf{F}$ entlang dieser Kurve $\tilde{C}$ an!

Hinweis: Verwenden Sie b).

LÖSUNG

a) Die Integrabilitätsbedingung für $\mathbf{F}$ lautet

$$\frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y). \tag{1}$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y) = 12xy^2 - \sin x$$
$$\frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y) = 12xy^2 - \sin x$$

ist (1) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

b) i) Eine mögliche Parametrisierung $\mathbf{r_1}(t)$ für die Strecke $\overrightarrow{P_4P_3}$ ist

$$\mathbf{r_1}(t) = P_4 + t(P_3 - P_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

Analog erhält man Parametrisierungen $\mathbf{r_2}(t)$ und $\mathbf{r_3}(t)$ für $\overrightarrow{P_3P_2}$ bzw. $\overrightarrow{P_2P_1}$:

$$\mathbf{r_2}(t) = P_3 + t(P_2 - P_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$
$$\mathbf{r_3}(t) = P_2 + t(P_1 - P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Für eine Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$ der gesamten Kurve C, müssen die einzelnen Strecken geschickt zusammengefügt werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r_1}(t), & t \in [0,1] \\ \mathbf{r_2}(t-1), & t \in [1,2] \\ \mathbf{r_3}(t-2), & t \in [2,3]. \end{cases}$$

ii) Das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ entlang C ist definiert durch

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Da aber $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist, hängt der Wert des Kurvenintegrals nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab und wir können die (relativ umständliche) Berechnung des obigen Integrals umgehen, indem wir statt C die direkte Verbindung von P_4 mit P_1, also die Strecke $\overrightarrow{P_4P_1}$ wählen. Deren Parametrisierung ist (zum Beispiel)

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = P_4 + t(P_1 - P_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Damit ergibt sich

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\overrightarrow{P_4P_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}(t)) \cdot (\hat{\mathbf{r}})'(t)\, dt = \int_0^1 \underbrace{\mathbf{F}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \end{pmatrix})}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\, dt = \int_0^1 -1\, dt = -1.$$

c) Die Kurve $\tilde{C}$ hat den Anfangspunkt P_1 und den Endpunkt P_4. Da $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist, ist der Wert des Kurvenintegrales von $\mathbf{F}$ entlang $\tilde{C}$ gleich dem entlang einer beliebigen Kurve mit demselbem Anfangs- und Endpunkt, zum Beispiel der geraden Strecke $\overrightarrow{P_1P_4}$. Also erhalten wir

$$\int_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\overrightarrow{P_1P_4}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\overrightarrow{P_4P_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = +1.$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir das Resultat $\int_{\overrightarrow{P_4P_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -1$ aus ii) verwendet.

Aufgabe 3. Das Kraftfeld $\mathbf{F}$ ist gegeben durch das Gradientenfeld

$$\nabla u(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^3 + 9 \\ 3y^2 x - 2z \\ 4z^2 - 2y \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie alle möglichen Potentiale $u(x, y, z)$.

b) Am Punkt $(1, 0, 2)$ soll das Potential $u(x, y, z)$ den Wert $u(1, 0, 2) = 20$ haben. Legen Sie $u(x, y, z)$ so fest, dass diese Bedingung erfüllt ist.

c) Ein Massepunkt bewegt sich vom Raumpunkt $(0, 1, 0)$ entlang der Parabel $z = y^2 - 1$ bis zum Raumpunkt $(0, 0, -1)$ und zurück entlang der Geraden

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die das Feld entlang der Parabel und die Arbeit, die das Feld entlang der Geraden verrichtet. Führen Sie dabei explizit beide Integrationen durch und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse.

LÖSUNG

a) $u_x = \int F_x dx = y^3 x + 9x + C_1(y, z)$
$u_y = \int F_y dy = y^3 x - 2yz + C_2(x, z)$
$u_z = \int F_z dz = \frac{4}{3} z^3 - 2yz + C_3(x, y)$

Forderung: $u_x \equiv u_y \equiv u_z$
$\Rightarrow C_1 = -2yz + \frac{4}{3} z^3$, $C_2 = \frac{4}{3} z^3 + 9x$, $C_3 = y^3 x + 9x$

$u(x, y, z) = y^3 x - 2yz + \frac{4}{3} z^3 + 9x + C$

Es gibt unendlich viele Potentiale, die jeweils durch die Konstante C bestimmt sind. Man kann den Nullpunkt des Potentials also beliebig wählen ohne die physikalische Größe, das Kraftfeld, zu ändern.

b) Durch die Bedingung in der Angabe ist die Konstante C eindeutig bestimmt.

$$u(1, 0, 2) = \frac{59}{3} + C = 20 \qquad C = \frac{1}{3} \qquad u(x, y, z) = y^3 x - 2yz + \frac{4}{3} z^3 + 9x + \frac{1}{3}$$

c) Da in einem Gradientenfeld über eine geschlossene Kurve integriert wird, erwartet man, dass insgesamt keine Arbeit verrichtet wird.

$\oint_C \vec{F} d\vec{s}$

Erster Teil des Weges:
$z = y^2 - 1$
$dz = 2ydy$
$x = 0$
$\int (-2z)dy + (4z^2 - 2y)dz =$
$\int_1^0 ((-2(y^2 - 1))dy + (4(y^2 - 1)^2 - 2y)2ydy =$
$\int_0^1 (-8y^5 + 16y^3 + 6y^2 - 8y - 2)dy = -\frac{4}{3}$

Zweiter Teil des Weges:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\int (-2zdy + (4z^2 - 2y)dz) = \int_0^1 ((2 - 2t) + (4 - 10t + 4t^2))dt = \frac{4}{3}$
$\oint_C \vec{F} d\vec{s} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$

Aufsummieren der Wegintegrale bestätigt die Erwartung, dass das Integral über den geschlossenen Weg und somit die verrichtete Arbeit Null ist.