Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2011/12

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (16. Dezember 2011)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ eines punktförmigen Basketballspielers sowie seine Position zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} e^t t^2 \\ 2t+3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ des Basketballspielers. (*Hinweis: partielle Integration)*

b) Zum Zeitpunkt $t = 3$ wirft der Basketballspieler einen Ball genau entlang seiner Bewegungsrichtung, mit einem Neuntel seiner eigenen Geschwindigkeit (also $|\mathbf{v}_{Ball}| = \frac{1}{9}|\mathbf{v}(3)|$). Stellen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r_B}(t)$ des Balles auf. Gehen Sie von einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung aus. *(Hinweis: $r(3) = (5e^3, 19, 31)$)*

c) Die Ebene der rechten Outlinie ist gegeben durch die Richtungsvektoren

$$\mathbf{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und den Punkt $P = (4, 127, 37)$.
Stellen Sie die Ebenengleichung in der Form $ax + by + cz = d$ auf.
Zu welchem Zeitpunkt und in welchem Punkt überquert der Ball die rechte Outlinie (d.h. schneidet die Ebene)?

d) Geben Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Basketballspielers zwischen den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t_1 = 3$ an.

LÖSUNG

a) Die Bestimmung der Bahnkurve aus der Geschwindigkeit und einem gegebenen Anfangspunkt erfolgt mit

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t)\, dt$$

bzw. durch unbestimmtes Integrieren von $\mathbf{v}(t)$ und anschließendes Anpassen der Integrationskonstante an die Anfangsbedingung $\mathbf{r}(0)$.
Integral der x-Komponente von $\mathbf{v}(t)$:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{e^t}_{u'} \underbrace{t^2}_{v} dt &= \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{t^2}_{v} - \int \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{2t}_{v'} dt + C_1 = e^t t^2 - 2 \int \underbrace{e^t}_{u'} \underbrace{t}_{v} dt + C_1 = \\
&= e^t t^2 - 2 \left(\underbrace{e^t}_{u} \underbrace{t}_{v} - \int \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{1}_{v'} dt \right) + C_1 = e^t t^2 - 2\left(e^t t - e^t\right) + C_1 = \\
&= e^t t^2 - 2e^t t + 2e^t + C_1 = e^t(t^2 - 2t + 2) + C_1
\end{aligned}$$

y-Komponente:

$$\int (2t+3)\, dt = 2 \int t\, dt + \int 3\, dt = 2\frac{t^2}{2} + 3t + C_2 = t^2 + 3t + C_2$$

z-Komponente:

$$\int 3t^2\,dt = 3\int t^2\,dt = 3\frac{t^3}{3} + C_3 = t^3 + C_3$$

Somit gilt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t(t^2 - 2t + 2) \\ t^2 + 3t \\ t^3 \end{pmatrix} + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dadurch ergibt sich

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sowie für die Bahnkurve des Basketballspielers:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t(t^2 - 2t + 2) \\ t^2 + 3t + 1 \\ t^3 + 4 \end{pmatrix}$$

b) Um die Tangente zum Zeitpunkt $t = 3$ aufstellen zu können, brauchen wir den Punkt $\mathbf{r}(3)$ und die Ableitung zu diesem Zeitpunkt $\mathbf{r}'(3) = \mathbf{v}(3)$.

$$\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 9e^3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}(3) = \begin{pmatrix} 5e^3 \\ 19 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Da der Ball die $\frac{1}{9}$-fache Geschwindigkeit des Spielers haben soll, ist der Richtungsvektor der Tangente $\frac{1}{9} \cdot \mathbf{v}(3)$:

$$\mathbf{r_B}(t) = \begin{pmatrix} 5e^3 \\ 19 \\ 31 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}(t-3)\begin{pmatrix} 9e^3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^3 \\ 19 \\ 31 \end{pmatrix} + (t-3)\begin{pmatrix} e^3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Für die Ebenengleichung benötigt man zuerst den Normalvektor:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{P}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 127 \\ 37 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$z - 37 = 0$$

Den Schnittpunkt erhalten wird durch Einsetzen der Bahnkurve des Balles in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned}(31 + 3(t-3)) - 37 &= 0\\ -6 + 3t - 9 &= 0\\ 3t &= 15\\ t &= 5\end{aligned}$$

Das ergibt den Schnittpunkt: $(7e^3, 21, 37)$

d) Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$\frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5e^3 - 2 \\ 18 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5e^3 - 2) \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

Ein Draht ist gegeben durch seine Form $\mathbf{r}(t)$. Auf ihn wirkt ein (elektrisches) Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y, z)$.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x+2y \\ 2z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

a) Bestimmen Sie die potentielle Energie $E(x, y, z)$, sodass $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla E(x, y, z)$ sowie $E(0, 0, 0) = 0$ gelten.

b) Bestimmen Sie die potentielle Energie des gesamten Drahtstückes $E_{Draht} = \int_C E\, ds$ in der Position $\mathbf{r}_1(t)$. E ist die in a) berechnete potentielle Energie.

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{r}(t)$$

c) Welche Arbeit verrichtet das Feld $\mathbf{F}(x, y, z)$ an einem Massepunkt, der sich längs der Kurve $\mathbf{p}(t)$ vom Punkt $\mathbf{t}_0 = -1$ zum Punkt $\mathbf{t}_1 = 2$ bewegt?

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} 1+t^3 \\ 2+t \\ t^2+t \end{pmatrix}$$

LÖSUNG

a) Zur Bestimmung des Potentials integrieren wir die einzelnen Komponenten nach ihrer Koordinate und setzen die Ergebnisse zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 2y & \Rightarrow E &= \int 2y\,dx = 2xy + C(y,z) \\ \frac{dF}{dy} &= 2x+2y & \Rightarrow E &= \int (2x+2y)\,dy = 2xy + y^2 + C(x,z) \\ \frac{dF}{dz} &= 2z & \Rightarrow E &= \int 2z\,dz = z^2 + C(x,y) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $E(x, y, z) = 2xy + y^2 + z^2 + C$. Für $E(0, 0, 0) = 0$ ist $C = 0$.

b) Wir berechnen $E_1 = \int E(r_1(t)) \cdot |r_1'(t)|\, dt$:

$$r_1'(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \qquad |r_1'(t)| = \sqrt{3^2 + \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} E(r_1(t)) \cdot |r_1'(t)| \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2 \cdot 3t(2+\sin t) + (2+\sin t)^2 + \cos^2 t)\sqrt{10} \, dt = \\
&= \sqrt{10} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (12t + 6t \sin t + 4 + 4 \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \\
&= \sqrt{10} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (12t + 6t \sin t + 5 + 4 \sin t) \, dt = \\
&= \sqrt{10}(6t^2 + 6 \sin t - 6t \cos t + 5t - 4 \cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\
&= \sqrt{10}(5\pi - 12 + 12\pi^2)
\end{aligned}$$

c) $E(p(t_1)) - E(p(t_0)) = E(9,4,6) - E(0,1,0) = (2 \cdot 9 \cdot 4 + 4^2 + 6^2) - (0+1+0) = 72 + 16 + 36 - 1 = 123$

Aufgabe 3.

Die Bahnkurve eines Wagens auf der neuen, spiralförmigen Hochschaubahn im Wiener Prater besitzt die Darstellung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\,t^n \sin t \\ 2\,t^n \cos t \\ \sqrt{8}\,(40^n - t^n) \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 40 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Berechnen Sie das differentielle Bogenelement ds für allgemeines n. Verwenden Sie in allen folgenden Beispielen $n = 2$.

b) Für $n = 2$ ergibt sich $ds = \sqrt{48t^2 + 4t^4}\,dt$. Berechnen Sie die Bogenlänge S der Kurve.

c) Das gegebene Feld $\mathbf{F}$ ist ein Gradientenfeld. Berechnen Sie $E_{pot}(\mathbf{r})$, sodass gilt: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla E_{pot}(\mathbf{r})$ und $E_{pot}(\mathbf{r}(0)) = 0$. Das Feld lautet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}.$$

d) Wie groß ist die vom Kraftfeld $\mathbf{F}$ am Wagen verrichtete Arbeit zwischen Anfangspunkt und Endpunkt $\Delta E = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$?

e) Die Summe aus kinetischer Energie in z-Richtung $E^z_{kin} = \frac{mv_z^2}{2}$ und potentieller Energie $E_{pot}(\mathbf{r}(t))$ aus c) ist eine Erhaltungsgröße (v_z ist die z-Komponente der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ des Wagens). Zeigen Sie, dass folgende Größe mit $g = \sqrt{32}$ nicht von der Zeit abhängt:

$$E^z_{ges} = E^z_{kin} + E_{pot} = \frac{mv_z(t)^2}{2} + E_{pot}(\mathbf{r}(t))$$

Hinweis: Wenn Ihr Ergebnis Ausdrücke wie 30^2 oder $(15 + \frac{2}{3})^2$ beinhaltet, müssen Sie diese nicht weiter ausrechnen.

LÖSUNG

a) Die infinitesimale Bogenlänge errechnet sich durch die übliche Formel

$$\begin{aligned} ds = |\mathbf{r}'(t)|dt &= \left| \begin{pmatrix} 2\,n\,t^{n-1} \sin t + 2\,t^n \cos t \\ 2\,n\,t^{n-1} \cos t - 2\,t^n \sin t \\ -\sqrt{8}n\,t^{n-1} \end{pmatrix} \right| dt \\ &= \sqrt{(2\,n\,t^{n-1} \sin t + 2\,t^n \cos t)^2 + (2\,n\,t^{n-1} \cos t - 2\,t^n \sin t)^2 + (\sqrt{8}n\,t^{n-1})^2}\,dt \\ &= \sqrt{12n^2\,t^{2n-2} + 4t^{2n}}\,dt = 2\,t^{n-1}\sqrt{3n^2 + t^2}\,dt \end{aligned}$$

b) Die Auswertung des Integrals für die gesamte Bogenlänge läuft folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned} S &= \int ds = \int_0^{40} |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^{40} \sqrt{48t^2 + 4t^4}\,dt = \int_0^{40} 2t\sqrt{12 + t^2}\,dt = \left| \begin{matrix} u = 12 + t^2 \\ du = 2t\,dt \end{matrix} \right| \\ &= \int_{u_0}^{u_1} u^{1/2}\,du = \left| \frac{2}{3} u^{3/2} \right|_{u_0}^{u_1} = \left| \frac{2}{3}(12 + t^2)^{3/2} \right|_{t=0}^{t=40} = \frac{2}{3}\left[(12 + 40^2)^{3/2} - 12^{3/2}\right] \end{aligned}$$

c) Da x- und y-Koordinate des Feldes 0 sind, ist $E_{pot}(\mathbf{r}) = \int dz\, F_z = \int dz\, mg = mgz + C$. Zusätzlich soll gelten, dass $mgz(t=0)+C = 0$, also ergibt sich unter Berücksichtigung von $z(t=0) = \sqrt{8}\,40^2$ durch Umformen $C = -mg\sqrt{8}\,40^2$ und damit $E_{pot}(\mathbf{r}) = mg(z - \sqrt{8}\,40^2)$.

d) Somit ist der Wert des Kurvenintegrals

$$\Delta E = \int_0^{40} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = E_{pot}(\mathbf{r}(40)) - E_{pot}(\mathbf{r}(0)) = mg(r_z(40) - r_z(0)) = -mg\,40^2\sqrt{8}$$

e) Aus a) ist bekannt, dass $v_z(t) = r_z'(t) = -2\sqrt{8}t$. Für die potentielle Energie ergibt sich durch Einsetzen der Bahnkurve (insbesondere der z-Komponente) $E_{pot}(\mathbf{r}(t)) = mg(z(t) - \sqrt{8}\,40^2) = mg(\sqrt{8}(40^2 - t^2) - \sqrt{8}\,40^2) = -\sqrt{8}mgt^2$. Die angegebene Größe E_{ges}^z lautet also mit $g = \sqrt{32}$

$$E_{ges}^z = \frac{mv_z(t)^2}{2} + E_{pot}(\mathbf{r}(t)) = \frac{32mt^2}{2} - \sqrt{8}mgt^2 = 0$$

und hängt damit nicht von der Zeit ab.