Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2011/12

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Haupttest (20. Jänner 2012)

Gruppe bunt *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner;* *Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

a) Der Körper K ist definiert durch die Ungleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 > 1, \qquad x^2 + y^2 + z^2 < 4, \qquad z > 0.$$

Erstellen Sie eine Skizze, geben Sie die den Körper K definierenden Ungleichungen in Kugelkoordinaten an und berechnen Sie die Größe

$$\int_K e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV.$$

b) Betrachten Sie nun den Körper K', der sich vom Körper K aus a) nur dadurch unterscheidet, dass er von $y > 0$ anstatt von $z > 0$ begrenzt wird. Berechnen Sie erneut die Größe

$$\int_{K'} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV.$$

c) Berechnen Sie für das Gebiet K'', gegeben durch die Ungleichungen

$$x^2 + y^2 < R^2, \qquad z < 0,$$

die Größe

$$\int_{K''} \sin(x^2 + y^2) e^{2z}\, dV.$$

Hinweis für a) und b): Um die Begrenzungen in z- und y-Richtung in Kugelkoordinaten zu übersetzen, betrachten Sie, wie Sie die Winkel wählen müssen, damit z bzw. y laut Koordinatentransformation jedenfalls positiv bleibt.

LÖSUNG

Für a) und b) bieten sich aufgrund der angegebenen Grenzen der Gebiete Kugelkoordinaten an, für c) Zylinderkoordinaten.

a) Das Integral lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int_K e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{r^2 \sin\vartheta}^{\text{Fktdet.}}\, e^{r^3}\, d\vartheta\, dr\, d\varphi \\
&= 2\pi \int_{r=1}^{2}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\vartheta e^{r^3} d\vartheta\, dr = -2\pi \int_{r=1}^{2} r^2 e^{r^3}\, dr \cos\vartheta\Big|_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi \int_{r=1}^{2} r^2 e^{r^3} dr = \left| \begin{matrix} u = r^3 \\ du = 3r^2 dr \end{matrix} \right| = 2\pi \int_{u_0}^{u_1} r^2 e^u \frac{du}{3r^2} \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{u_0}^{u_1} e^u du = \frac{2\pi}{3} e^u\Big|_{u_0}^{u_1} = \frac{2\pi}{3} e^{r^3}\Big|_1^2 = \frac{2\pi}{3}\left(e^8 - e\right).
\end{aligned}$$

Da der Integrand nicht von φ abhängt, ergibt die Integration nach φ nur einen Faktor 2π.

b) Für K' gelten die Grenzen

$$1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Da der Integrand $e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ rotationssymmetrisch ist, ist der Integralwert über jede mögliche Kugelhälfte gleich (man muss also gar nichts rechnen). In der Rechnung zeigt sich das auf folgende Art und Weise:

$$\begin{aligned}
\int_{K'} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=1}^{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \overbrace{r^2 \sin\vartheta}^{\text{Fktdet.}}\, e^{r^3}\, d\vartheta\, dr\, d\varphi \\
&= \pi \int_{r=1}^{2} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^2 \sin\vartheta e^{r^3} d\vartheta\, dr = -\pi \int_{r=1}^{2} r^2 e^{r^3} dr \cos\vartheta \Big|_{\vartheta=0}^{\pi} \\
&= 2\pi \int_{r=1}^{2} r^2 e^{r^3} d\vartheta\, dr = \ldots
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_{K''} \sin(x^2+y^2) e^{2z}\, dV &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=-\infty}^{0} \overbrace{r}^{\text{Fktdet.}} \sin(r^2) e^{2z} dz\, dr\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\, 2\pi \int_{r=0}^{R} r \sin(r^2)\, dr\, e^{2z} \Big|_{z=-\infty}^{0} = \pi \int_{r=0}^{R} r \sin(r^2)\, dr \\
&= \left| \begin{aligned} u &= r^2 \\ du &= 2r\, dr \end{aligned} \right| = \pi \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{2} \sin(u)\, du \\
&= -\frac{\pi}{2} \cos(u) \Big|_{u_0}^{u_1} = -\frac{\pi}{2} \cos(r^2) \Big|_{r=0}^{R} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos R^2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = e^{-y}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Berechnen Sie die Lösung $y(x)$ mit der Bedingung $y(1) = 1$.

b) Geben Sie für die Differentialgleichung

$$3y'' + 12y' + Ay = 0$$

den Wert der Konstante A an, sodass das charakteristische Polynom der Gleichung nur eine Nullstelle besitzt. Wie lautet in diesem Fall die allgemeine Lösung $y(t)$ der Gleichung?

LÖSUNG

a) Die Lösung ist mittels Separation der Variablen bestimmbar (laut (5.39) im Skriptum).

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= e^{-y}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \\
\int e^{y}\, dy &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx + C \\
e^{y} &= \ln x + \frac{1}{x} + C \\
y(x) &= \ln\left(\ln x + \frac{1}{x} + C\right).
\end{aligned}$$

Um die Bedingung $y(1) = 1$ zu erfüllen, muss die Konstante C entsprechend bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
y(1) = 1 &= \ln(\ln 1 + 1 + C) \\
e^{1} &= 1 + C \\
C &= e - 1.
\end{aligned}$$

Die Lösung ist somit

$$y(x) = \ln\left(\ln x + \frac{1}{x} + e - 1\right).$$

b) Für die gegebene Gleichung lauten das charakteristische Polynom (Gl. (5.20) im Skriptum) und seine Nullstellen

$$3\lambda^2 + 12\lambda + A$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{A}{3}}.$$

Damit das Polynom nur eine Nullstelle besitzt, muss die Diskriminante verschwinden, daher ist $A = 12$ und $\lambda = -2$. Die allgemeine Lösung lautet (siehe (5.24) im Skriptum)

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

Aufgabe 3.

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$(2xy - 3x^2 + 2x)\ dx + x^2\ dy = 0. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung exakt ist.

b) Bestimmen Sie die Gleichung $\Phi(x, y) = c$, die von allen Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung erfüllt wird.

c) Bestimmen Sie c, sodass die durch $\Phi(x, y) = c$ gegebene Lösung durch den Punkt (1,1) geht.

d) Wie viele Lösungen erhalten Sie für $c = 0$? Geben Sie die Lösung(en) $x = x(y)$ explizit an. *(Hinweis: Lösen Sie die in b) erhaltene Gleichung nach x auf.)*

e) Ist die Differentialgleichung

$$ye^{5x}\ dx + e^{5x}\ dy = 0 \tag{2}$$

exakt?

LÖSUNG

a)

$$\underbrace{(2xy - 3x^2 + 2x)}_{a(x,y)}\ dx + \underbrace{x^2}_{b(x,y)}\ dy = 0$$

Überprüfen der Integrabilitätsbedingungen ergibt

$$\begin{aligned} a_y &= 2x \\ b_x &= 2x. \end{aligned}$$

Da $a_y = b_x$, ist die Differentialgleichung exakt.

b) Man erhält durch Integration von $a(x, y)$ nach x und $b(x, y)$ nach y das erste Integral der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int (2xy - 3x^2 + 2x)\ dx = x^2y - x^3 + x^2 + C(y), \\ \Phi(x, y) &= \int x^2\ dy = x^2y + C(x). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt das:

$$\Phi(x, y) = x^2y - x^3 + x^2 = c.$$

c) Einsetzen des Punktes (1,1) in $\Phi(x, y)$ ergibt $c = 1$.

d) Auflösen der Gleichung $x^2(y - x + 1) = 0$ nach x ergibt die Lösungen:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= y + 1. \end{aligned}$$

e)

$$\underbrace{ye^{5x}}_{a(x,y)}\ dx + \underbrace{e^{5x}}_{b(x,y)}\ dy = 0.$$

Überprüfen der Integrabilitätsbedingungen ergibt:

$$\begin{aligned} a_y &= e^{5x} \\ b_x &= 5e^{5x}. \end{aligned}$$

Da $a_y \neq b_x$, ist die Differentialgleichung nicht exakt.