Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2010/2011

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (18. März 2011)

(mit Lösung)

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— *Unterlagen: eigenes Skriptum, einzeiliger Taschenrechner gestattet* ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1.

a) Berechnen Sie die Masse des Inhalts eines gefüllten Cocktailglases.

Die den Inhalt des Glases einschließende Form sei gegeben durch

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad 0 \leq z \leq 5$$

Das Glas ist im Bereich $0 \leq z \leq 3$ mit einem Zuckergetränk gefüllt bei dem die Dichte dem Gesetz $\rho_1(z) = 10 - z$ folgt. Im Abschnitt $3 \leq z \leq 5$ befindet sich Schaum mit einer konstanten Dichte $\rho_2 = 3$.

b) Das Design des Glases wird geändert, sodass die Glasform nun durch

$$x^2 + y^2 = z \qquad 0 \leq z \leq 5$$

gegeben ist. An der Befüllungsaufteilung des Glases und den Dichten $\rho_1(z)$ und ρ_2 ändert sich nichts. Berechnen Sie erneut die Masse des Inhalts.

Hinweis: *Verwenden Sie jeweils geeignete Koordinaten und teilen Sie den Integrationsbereich auf.*

LÖSUNG

a) Die gegebene Form des Glases suggeriert Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

Das vom Glas eingeschlossene Volumen kann daher beschrieben werden durch

$$0 \leq z \leq 5$$

sowie

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \leq z^2 \Rightarrow r \leq z$$

Wegen den verschiedenen gegebenen Dichten wird der Integrationsbereich in einen Bereich $0 \leq z \leq 3$ sowie in einen Bereich $3 \leq z \leq 5$ aufgeteilt; die Massen werden getrennt berechnet und dann aufaddiert.

Die Begrenzung des Integrationsbereiches in r ist durch obige Umformung der gegebenen Gleichung $0 \leq r \leq z$, z läuft von 0 bis 3 bzw. von 3 bis 5 (je nach Bereich), und φ geht über den ganzen definierten Bereich (0 bis 2π), da das Objekt rotationssymmetrisch um die z-Achse ist.

Beachten Sie die Integrationsreihenfolge: Die z-Integration muss nach der r-Integration durchgeführt werden, da die obere Grenze des r-Integrals von z abhängt.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \int_{V_1} \rho_1 dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dz \int_0^z dr \overbrace{r}^{FD}(10-z) = 2\pi \int_0^3 dz \int_0^z dr\ r(10-z) \\
&= \pi \int_0^3 dz\ z^2(10-z) = \pi \left(10 \cdot 9 - \frac{3^4}{4}\right) \\
m_2 &= \int_{V_2} \rho_2 dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 dz \int_0^z dr\ 3r = \pi(5^3 - 3^3) \\
m_{ges} &= m_1 + m_2 = \frac{671\pi}{4}
\end{aligned}$$

b) Funktioniert analog zu a), nur dass die Begrenzung des Objektes in r (Berechnung ebenfalls analog zu a)) sich zu $0 \leq r \leq \sqrt{z}$ ergibt.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \int_{V_1} \rho_1 dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{z}} dr\ r(10-z) = \pi \int_0^3 dz\ z(10-z) \\
&= \pi \left(10 \cdot \frac{9}{2} - 9\right) \\
m_2 &= \int_{V_2} \rho_2 dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 dz \int_0^{\sqrt{z}} dr\ 3r = \frac{3\pi}{2}(5^2 - 3^2) \\
m_{ges} &= m_1 + m_2 = 60\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Die Funktionen $u, v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$u(x,y,z) = x^2 + xy, \quad v(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + y + az, \quad w(x,y,z) = by \tag{1}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Diese bilden ein Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Festsetzung

$$\mathbf{F}(x,y,z) := \big(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\big)^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie jene Ebene ε, die orthogonal auf den Vektor $\mathbf{n} = (2,1,0)^{\mathrm{T}}$ steht und den Punkt $P = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$ enthält. Zeigen Sie, dass der Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w \tag{3}$$

für alle Punkte dieser Ebene ε verschwindet.

b) Berechnen Sie den Ausdruck

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} := \left(\frac{\partial}{\partial y} w - \frac{\partial}{\partial z} v, \frac{\partial}{\partial z} u - \frac{\partial}{\partial x} w, \frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Welche Bedingungen für $\mathbf{F}$ sind im Falle $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ erfüllt?

c) Nun seien weiters zwei Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ durch

$$\mathcal{C}_1(t) := (2t, t, 5t)^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_2(t) := \big(2(1-t), 1-t, 5(1-t)^2\big)^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

mit $0 \le t \le 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass diese beiden Wege zusammen einen geschlossenen Weg $\mathcal{C}$ ergeben und berechnen Sie das Integral

$$J := \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \tag{6}$$

von $\mathbf{F}$ entlang dieses Weges $\mathcal{C}$.

d) Bestimmen Sie nun b in Abhängigkeit von a so, dass dieses Integral verschwindet. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Zusammenhang mit Punkt b) dieser Aufgabe.

e) Bestimmen Sie für den Fall $b = a$ eine Stammfunktion φ des Vektorfeldes $\mathbf{F}$. Das Skalarfeld φ soll also die Relation

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi \tag{7}$$

erfüllen.

LÖSUNG

a) Mit $X = (x,y,z)^{\mathrm{T}}$ ergibt sich die Gleichung für ε durch

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot X &= \mathbf{n} \cdot P \\ 2x + y &= -1. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &:= \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w \\ &= 2x + y + 1. \end{aligned}$$

Für alle $X = (x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \varepsilon$ gilt also $\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = 0$.

b) Wir berechnen die Komponenten von rot$\mathbf{F}$ einzeln.

$$(\text{rot}\mathbf{F})_x = \frac{\partial}{\partial y}w - \frac{\partial}{\partial z}v = b - a$$
$$(\text{rot}\mathbf{F})_y = \frac{\partial}{\partial z}u - \frac{\partial}{\partial x}w = 0 - 0$$
$$(\text{rot}\mathbf{F})_z = \frac{\partial}{\partial x}v - \frac{\partial}{\partial y}u = x - x$$

Damit ergibt sich rot $\mathbf{F} = (b-a, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Betrachtet man die einzelnen Komponenten von rot$\mathbf{F}$, so erkennt man darin die Integrabilitätsbedingungen von $\mathbf{F}$. Diese sind im Fall $b = a$ erfüllt.

c)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(0) &= (0,0,0)^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}_2(1) \quad \text{Anfangspunkt } \mathcal{C}_1 \text{ ist ident mit Endpunkt } \mathcal{C}_2 \text{ und} \\ \mathcal{C}_1(1) &= (2,1,5)^{\mathrm{T}} = \mathcal{C}_2(0) \quad \text{Endpunkt } \mathcal{C}_1 \text{ ist ident mit Anfangspunkt } \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

Somit ergibt $\mathcal{C}_1$ zusammen mit $\mathcal{C}_2$ einen geschlossenen Weg $\mathcal{C}$. Das Integral J berechnen wir nun entlang der einzelnen Wege, d.h.

$$J := \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

Für das Integral entlang von $\mathcal{C}_1$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{dr} &= (2,1,5)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (4t^2 + 2t^2, 2t^2 + t + 5at, bt)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \int_0^1 12t^2 + 2t^2 + t + 5at + 5bt \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 14t^2 + (1 + 5a + 5b)t \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{14}{3} + \frac{1}{2}(1 + 5a + 5b) \\ &= \frac{31}{6} + \frac{5}{2}(a+b). \end{aligned}$$

Für das Integral entlang von $\mathcal{C}_2$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{dr} &= \big(-2, -1, -10(1-t)\big)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \big(4(1-t)^2 + 2(1-t)^2, 2(1-t)^2 + (1-t) + 5a(1-t)^2, b(1-t)\big)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \int_0^1 -12(1-t)^2 - 2(1-t)^2 - (1-t) - 5a(1-t)^2 - 10b(1-t)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (-14 - 5a - 10b)(1-t)^2 - (1-t) \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Substitution: $1-t \to t$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (-14-5a-10b)t^2 - t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}(-14-5a-10b) - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{31}{6} - \frac{5}{3}(a+2b).
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\begin{aligned}
J = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} \\
&= \frac{31}{6} + \frac{5}{2}(a+b) - \frac{31}{6} - \frac{5}{3}(a+2b) \\
&= \frac{5}{6}(a-b).
\end{aligned}$$

d) Damit J verschwindet, muss natürlich $b = a$ gelten. Das stimmt auch mit Punkt b) dieser Aufgabe überein, da ja in diesem Fall die Integrabilitätsbedingungen für $\mathbf{F}$ erfüllt sind und man damit erhoffen kann, dass das Integral

$$J = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$$

entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ verschwindet.

e) Zur Bestimmung einer Stammfunktion φ von $\mathbf{F}$. Wir berechnen die unbestimmten Integrale

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \int u\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + C(y,z) \\
\varphi(x,y,z) &= \int v\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2 + ayz + C(x,z) \\
\varphi(x,y,z) &= \int w\,\mathrm{d}z = ayz + C(x,y)
\end{aligned}$$

mit noch zunächst unbestimmten Funktionen $C(y,z), C(x,z), C(x,y)$. Durch gleichsetzen dieser drei Gleichungen erhalten wir eine Lösung für diese Funktionen:

$$\begin{aligned}
C(y,z) &= \frac{1}{2}y^2 + ayz \\
C(x,z) &= \frac{1}{3}x^3 \\
C(x,y) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}$$

Eine mögliche Stammfunktion wäre z.B.

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2 + ayz.$$

Aufgabe 3.

a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2x - yx^2 - x^3 y'(x) = 0.$$

i) Zeigen Sie, dass die DGL nicht exakt ist.

ii) Es sei bekannt, dass die Funktion

$$y(x) = -\frac{1}{x} \ln \frac{C}{x^2} \tag{8}$$

die obige DGL löst (nicht nachrechnen!), wobei $C > 0$ eine beliebige Konstante ist. Bringen Sie (8) auf die Form $C = \Phi(x, y)$.

b) Gegeben sei die DGL

$$y''(x) - y(x) = 2xe^x.$$

i) Geben Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL an!

ii) Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = (ax^2 + bx)e^x$ um eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen.

iii) Geben Sie die allgemeine Lösung der DGL an.

LÖSUNG

a) i) Sei $p(x, y) = 2x - yx^2$, $q(x, y) = -x^3$. Die Integrabilitätsbedingung lautet $p_y = q_x$, was offenbar nicht erfüllt ist, da

$$p_y(x, y) = -x^2$$
$$q_x(x, y) = -3x^2.$$

ii) Multiplizieren mit x und Anwenden von exp liefert $e^{-xy} = \frac{C}{x^2}$, also

$$\Phi(x, y) := x^2 e^{-xy} = C.$$

b) i) Die homogene Gleichung lautet

$$y'' - 4y = 0, \tag{9}$$

das charakteristische Polynom ist also $\lambda^2 - 1$ und hat die Nullstellen ± 1. Damit ist die allgemeine Lösung von (9) (siehe Skriptum S. 107):

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{10}$$

ii) Wir machen den Ansatz $y_p(x) = (ax^2 + bx)e^x$, wobei die Konstanten a, b so zu bestimmen sind, dass die (inhom.) Gleichung gelöst wird, also

$$y_p''(x) - y_p(x) = 2xe^x \tag{11}$$

gilt. Differenzieren des Ansatzes liefert

$$y_p'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx)e^x$$
$$y_p''(x) = (2a + 2ax + b + 2ax + b + ax^2 + bx)e^x = (2a + 2b + 4ax + ax^2 + bx)e^x$$

und damit $y_p''(x) - y_p(x) = (2a + 2b + 4ax)e^x$. Damit (11) erfüllt ist, muss also

$$2a + 2b + 4ax = 2x$$

sein, d.h. $a = \frac{1}{2},\ b = -a = -\frac{1}{2}$. Wir erhalten damit die Partikulärlösung

$$y_p(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)e^x. \tag{12}$$

iii) Die allgemeine Lösung setzt sich aus homogener (10) und partikulärer (12) Lösung zusammen:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}(x^2 - x)e^x.$$