

# PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (9. März 2012)

Gruppe bunt (*mit Lösung*)

↑ <b>FAMILIENNAME</b>	↑ <b>Vorname</b>	↑ <b>Studium / MatrNr</b>

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\Sigma$ ( <i>max. 30</i> )		

**Aufgabe 1.** Die durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 2bx)^2 = 4b^2(x^2 + y^2), \quad b > 0,$$

gegebene Kurve – im Folgenden mit  $C$  bezeichnet – ist die sogenannte *Kardioide*.

- a) Zeigen Sie, dass die Kurve in Polarkoordinaten die Darstellung  $r(\varphi) = 2b(1 + \cos \varphi)$  besitzt. Begründen Sie den Definitionsbereich von  $\varphi$ , nämlich  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .
- b) Berechnen Sie das Bogenelement  $ds$  für eine unbekannte (!) Kurve, die in Polarkoordinaten als  $\tilde{r} = \tilde{r}(\varphi)$  darstellbar ist. Setzen Sie dann in das Ergebnis  $\tilde{r}(\varphi) = 2b(1 + \cos \varphi)$  ein. Hinweis: Die Kurve  $\tilde{r}(\varphi)$  lautet in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \tilde{r}(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

- c) Berechnen Sie die Kurvenlänge der Kardioide mit  $ds = 2b\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi$ . Hinweis: Benutzen Sie

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} 2b\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{4\sqrt{2}b \sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}}.$$

- d) Berechnen Sie die von der Kardioide eingeschlossene Fläche.

## LÖSUNG

- a) Einsetzen von Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

in die gegebene Gleichung und Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt (mit Verwendung der Identität  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ )

$$r^2 - 2br \cos \varphi = \pm 2br$$

$$r(r - 2b \cos \varphi \pm 2b) = 0.$$

Laut Produktnullsatz ist die Gleichung erfüllt, wenn  $r = 0$  oder  $r - 2b \cos \varphi \pm 2b = 0$ . Für den zweiten Fall ergibt sich weiter

$$r = 2b(\pm 1 + \cos \varphi).$$

Die Lösung  $r = 2b(-1 + \cos \varphi)$  wird vernachlässigt, da  $r \geq 0$  notwendig ist. Die Kurve in Polarform lautet also

$$r(\varphi) = 2b(1 + \cos \varphi).$$

Die Lösung  $r = 0$  ist enthalten, da  $r(\pi) = 0$ .

Der Definitionsbereich  $0 \leq \varphi < 2\pi$  gilt, da  $r(\varphi)$  auf dem ganzen Bereich reell und nichtnegativ ist.

b) Das Bogenelement  $ds$  lautet

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \\ &= \sqrt{(\tilde{r}'(\varphi) \cos \varphi - \tilde{r}(\varphi) \sin \varphi)^2 + (\tilde{r}'(\varphi) \sin \varphi + \tilde{r}(\varphi) \cos \varphi)^2} d\varphi \\ &= \sqrt{\tilde{r}'(\varphi)^2 + \tilde{r}(\varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Bei Einsetzen von  $\tilde{r}(\varphi) = 2b(1 + \cos \varphi)$  ergibt sich

$$ds = 2b\sqrt{(-\sin \varphi)^2 + (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = 2b\sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi$$

c)

$$\begin{aligned} \int_C ds &= 4 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sqrt{2b} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = 1 - \cos \varphi \\ du = \sin \varphi d\varphi \end{array} \right. \\ &= 4\sqrt{2b} \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{\sqrt{u}} du = 8\sqrt{2b}\sqrt{u} \Big|_{u_0}^{u_1} = 8\sqrt{2b}\sqrt{1 - \cos \varphi} \Big|_{\varphi=0}^{\pi} = \\ &= 16b. \end{aligned}$$

Den angegebenen Zusammenhang zw. den Integralen (nicht Teil der Aufgabe) zeigt man übrigens auf folgende Art und Weise:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cos \varphi} &= \sqrt{\frac{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}{1 - \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{1 - \cos \varphi}} \\ &= \frac{|\sin \varphi|}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{|\sin \varphi|}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} d\varphi = 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} d\varphi. \end{aligned}$$

Da die x-Achse eine Symmetrieachse der Figur ist, kann man das Integral auf das Intervall  $0 < \varphi < \pi$  beschränken und diese Größe verdoppeln. Weil  $\sin \varphi$  auf diesem Intervall positiv ist, gilt  $|\sin \varphi| = \sin \varphi$ .

d)

$$\begin{aligned} \int_C dA &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2b(1+\cos \varphi)} \overbrace{r}^{FD} dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{2b(1+\cos \varphi)} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{4b^2(1 + \cos \varphi)^2}{2} d\varphi = 2b^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= 2b^2(2\pi + 0 + \pi) = 6b^2\pi. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Die Funktionen  $u, v, w$  seien gegeben durch

$$u(x, y, z) := 2x^2 + xz, \quad v(x, y, z) := 2xz, \quad w(x, y, z) := y^2.$$

Diese bilden ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$  durch die Festsetzung

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^T.$$

a) Berechnen Sie

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w.$$

Bestimmen Sie den Normalvektor auf die durch  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$  gegebene Ebene.

b) Sei  $\mathbf{C}_1$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{r}_1(t) := (t, t^2, 1)^T$  von  $(0, 0, 1)^T$  nach  $(4, 16, 1)^T$ . Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  entlang der Kurve  $\mathbf{C}_1$ .

c) Sei  $\mathbf{C}_2$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{r}_2(t) := (t, 4t, 1)^T$  von  $(0, 0, 1)^T$  nach  $(4, 16, 1)^T$ . Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  entlang der Kurve  $\mathbf{C}_2$ .

d) Ist  $\mathbf{F}$  ein Gradientenfeld?

## LÖSUNG

a)

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 + xz) + \frac{\partial}{\partial y} (2xz) + \frac{\partial}{\partial z} (y^2) = 4x + z$$

Bei gegebenem Normalvektor  $\mathbf{n}$  bestimmt man die Ebenengleichung durch

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{P}) = 0.$$

Daraus folgt: der Normalvektor ist gegeben durch  $\mathbf{n} = (4, 0, 1)$ .

b)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, ds &= \int_0^4 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) \, dt = \int_0^4 \begin{pmatrix} 2t^2 + t \\ 2t \\ t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^4 (2t^2 + t + 4t^2) \, dt = \int_0^4 (6t^2 + t) \, dt = 6 \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 = 136. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, ds &= \int_0^4 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) \, dt = \int_0^4 \begin{pmatrix} 2t^2 + t \\ 2t \\ 16t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^4 (2t^2 + t + 8t) \, dt = \int_0^4 (2t^2 + 9t) \, dt = 2 \frac{t^3}{3} + 9 \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{344}{3}. \end{aligned}$$

d) Nein, da das Ergebnis der Kurvenintegrale zwischen denselben Punkten vom Weg abhängt.

### Aufgabe 3.

a) Geben Sie eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung an, die

$$y(t) = 5 e^{-8t} \cos(8t)$$

als Lösung besitzt.

b) Geben Sie die Lösung(en)  $y(t)$  für die Differentialgleichung

$$\frac{y'}{y} = t \sin t$$

an. Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

c) Berechnen Sie für die Differentialgleichung

$$(4y - 6x + 4) dx + 2x dy = 0$$

den integrierenden Faktor  $m(x)$ , sodass sie zu einer exakten Differentialgleichung wird. Geben Sie dann ein erstes Integral an.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung mit  $m(x)$  und überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen – Produktregel nicht vergessen!

### LÖSUNG

a) Laut Skriptum S. 108, Formel (5.25), ist die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung

$$y(t) = e^{-\frac{p}{2}t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)).$$

Durch Vergleich ergibt sich sofort  $p = 16$  und  $\omega = 8$ . Einsetzen dieser Größen in

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{4q - p^2}$$

und einfaches Umformen ergibt  $q = 128$ . Die DGL lautet also

$$y'' + 16y' + 128y = 0.$$

b) Durch Separation der Variablen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= t \sin t \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int t \sin t dt \\ \ln y &= \int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t + C \\ y &= e^{-t \cos t + \sin t + C} = \tilde{C} e^{-t \cos t + \sin t}. \end{aligned}$$

- c) Die Gleichung wird durch 2 dividiert und mit dem integrierenden Faktor (laut Angabe nur von  $x$  abhängig) multipliziert:

$$\underbrace{(2y - 3x + 2)m(x)}_{a(x,y)} dx + \underbrace{xm(x)}_{b(x,y)} dy = 0.$$

Die Integrabilitätsbedingungen lauten nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) &= 2m(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) &= m(x) + xm'(x).\end{aligned}$$

Nun muss  $\frac{\partial}{\partial y} a(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} b(x, y)$  gelten, also

$$\begin{aligned}2m(x) &= m(x) + xm'(x) \\ m(x) &= x \frac{dm}{dx} \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int \frac{1}{m} dm \\ \ln x + C &= \ln m \\ m &= \tilde{C}x.\end{aligned}$$

Da nur ein integrierender Faktor gesucht ist, kann man  $\tilde{C} = 1$  setzen; damit ist  $m(x) = x$ . Ein erstes Integral berechnet man durch Integration von  $a$  und  $b$ :

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int (2xy - 3x^2 + 2x) dx = x^2y - x^3 + x^2 + C(y) \\ \Phi(x, y) &= \int x^2 dy = x^2y + C(x).\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt das

$$\Phi(x, y) = x^2y - x^3 + x^2.$$