

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (9. März 2012)

Gruppe weiß (*mit Lösung*)

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
Σ (<i>max. 30</i>)		

Aufgabe 1. Die durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad a > 0,$$

gegebene Kurve – im Folgenden mit C bezeichnet – ist die sogenannte *Kardioide*.

- a) Zeigen Sie, dass die Kurve in Polarkoordinaten die Darstellung $r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ besitzt. Begründen Sie den Definitionsbereich von φ , nämlich $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- b) Berechnen Sie das Bogenelement ds für eine unbekannte (!) Kurve, die in Polarkoordinaten als $\tilde{r} = \tilde{r}(\varphi)$ darstellbar ist. Setzen Sie dann in das Ergebnis $\tilde{r}(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ ein. Hinweis: Die Kurve $\tilde{r}(\varphi)$ lautet in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \tilde{r}(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

- c) Berechnen Sie die Kurvenlänge der Kardioide mit $ds = a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi$. Hinweis: Benutzen Sie

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sqrt{2}a \sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}}.$$

- d) Berechnen Sie die von der Kardioide eingeschlossene Fläche.

LÖSUNG

- a) Einsetzen von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

in die gegebene Gleichung und Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt (mit Verwendung der Identität $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$)

$$\begin{aligned} r^2 - ar \cos \varphi &= \pm ar \\ r(r - a \cos \varphi \pm a) &= 0. \end{aligned}$$

Laut Produktnullsatz ist die Gleichung erfüllt, wenn $r = 0$ oder $r - a \cos \varphi \pm a = 0$. Für den zweiten Fall ergibt sich weiter

$$r = a(\pm 1 + \cos \varphi).$$

Die Lösung $r = a(-1 + \cos \varphi)$ wird vernachlässigt, da $r \geq 0$ notwendig ist. Die Kurve in Polarform lautet also

$$r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi).$$

Die Lösung $r = 0$ ist enthalten, da $r(\pi) = 0$.

Der Definitionsbereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ gilt, da $r(\varphi)$ auf dem ganzen Bereich reell und nichtnegativ ist.

b) Das Bogenelement ds lautet

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \\ &= \sqrt{(\tilde{r}'(\varphi) \cos \varphi - \tilde{r}(\varphi) \sin \varphi)^2 + (\tilde{r}'(\varphi) \sin \varphi + \tilde{r}(\varphi) \cos \varphi)^2} d\varphi \\ &= \sqrt{\tilde{r}'(\varphi)^2 + \tilde{r}(\varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Bei Einsetzen von $\tilde{r}(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$ ergibt sich

$$ds = a\sqrt{(-\sin \varphi)^2 + (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = a\sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi$$

c)

$$\begin{aligned} \int_C ds &= 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sqrt{2}a \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = 1 - \cos \varphi \\ du = \sin \varphi d\varphi \end{array} \right| \\ &= 2\sqrt{2}a \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{2}a 2\sqrt{u} \Big|_{u_0}^{u_1} = 4\sqrt{2}a \sqrt{1 - \cos \varphi} \Big|_{\varphi=0}^{\pi} = \\ &= 8a. \end{aligned}$$

Den angegebenen Zusammenhang zw. den Integralen (nicht Teil der Aufgabe) zeigt man übrigens auf folgende Art und Weise:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cos \varphi} &= \sqrt{\frac{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}{1 - \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{1 - \cos \varphi}} \\ &= \frac{|\sin \varphi|}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{|\sin \varphi|}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} d\varphi = 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} d\varphi. \end{aligned}$$

Da die x-Achse eine Symmetrieachse der Figur ist, kann man das Integral auf das Intervall $0 < \varphi < \pi$ beschränken und diese Größe verdoppeln. Weil $\sin \varphi$ auf diesem Intervall positiv ist, gilt $|\sin \varphi| = \sin \varphi$.

d)

$$\begin{aligned} \int_C dA &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a(1+\cos \varphi)} \overbrace{r}^{FD} dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{a^2(1 + \cos \varphi)^2}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{a^2}{2} (2\pi + 0 + \pi) = \frac{3a^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Die Funktionen u, v, w seien gegeben durch

$$u(x, y, z) := x^2 + \frac{y}{z}, \quad v(x, y, z) := yz + 2z, \quad w(x, y, z) := 3z.$$

Diese bilden ein Vektorfeld \mathbf{F} durch die Festsetzung

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^T.$$

a) Berechnen Sie

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w.$$

Bestimmen Sie den Normalvektor auf die durch $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ gegebene Ebene.

b) Sei \mathbf{C}_1 eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r}_1(t) := (t, t^2, 1)^T$ von $(0, 0, 1)^T$ nach $(3, 9, 1)^T$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes \mathbf{F} entlang der Kurve \mathbf{C}_1 .

c) Sei \mathbf{C}_2 eine Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r}_2(t) := (t, 3t, 1)^T$ von $(0, 0, 1)^T$ nach $(3, 9, 1)^T$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes \mathbf{F} entlang der Kurve \mathbf{C}_2 .

d) Ist \mathbf{F} ein Gradientenfeld?

LÖSUNG

a)

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 + \frac{y}{z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (yz + 2z) + \frac{\partial}{\partial z} (3z) = 2x + z + 3$$

Bei gegebenem Normalvektor \mathbf{n} bestimmt man die Ebenengleichung durch

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{P}) = 0.$$

Daraus folgt: der Normalvektor ist gegeben durch $\mathbf{n} = (2, 0, 1)$.

b)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, ds &= \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) \, dt = \int_0^3 \begin{pmatrix} t^2 + t^2 \\ t^2 + 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt = \\ &= \int_0^3 (2t^2 + 2t^3 + 4t) \, dt = 2 \frac{t^3}{3} + 2 \frac{t^4}{4} + 4 \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{153}{2}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, ds &= \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) \, dt = \int_0^3 \begin{pmatrix} t^2 + 3t \\ 3t + 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \, dt = \\ &= \int_0^3 (t^2 + 12t + 6) \, dt = \frac{t^3}{3} + 12 \frac{t^2}{2} + 6t \Big|_0^3 = 81. \end{aligned}$$

d) Nein, da das Ergebnis der Kurvenintegrale zwischen denselben Punkten vom Weg abhängt.

Aufgabe 3.

a) Geben Sie eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung an, die

$$y(t) = 5 e^{-4t} \cos(3t)$$

als Lösung besitzt.

b) Geben Sie die Lösung(en) $y(t)$ für die Differentialgleichung

$$\frac{y'}{y} = t \cos t$$

an. Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

c) Berechnen Sie für die Differentialgleichung

$$(2y - 3x + 2) dx + x dy = 0$$

den integrierenden Faktor $m(x)$, sodass sie zu einer exakten Differentialgleichung wird. Geben Sie dann ein erstes Integral an.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung mit $m(x)$ und überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen – Produktregel nicht vergessen!

LÖSUNG

a) Laut Skriptum S. 108, Formel (5.25), ist die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung

$$y(t) = e^{-\frac{p}{2}t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)).$$

Durch Vergleich ergibt sich sofort $p = 8$ und $\omega = 3$. Einsetzen dieser Größen in

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{4q - p^2}$$

und einfaches Umformen ergibt $q = 25$. Die DGL lautet also

$$y'' + 8y' + 25y = 0.$$

b) Durch Separation der Variablen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= t \cos t \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int t \cos t dt \\ \ln y &= \int t \cos t dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + C \\ y &= e^{t \sin t + \cos t + C} = \tilde{C} e^{t \sin t + \cos t}. \end{aligned}$$

c) Die Gleichung wird mit dem integrierenden Faktor (laut Angabe nur von x abhängig) multipliziert:

$$\underbrace{(2y - 3x + 2)m(x)}_{a(x,y)} dx + \underbrace{xm(x)}_{b(x,y)} dy = 0.$$

Die Integrabilitätsbedingungen lauten nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}a(x,y) &= 2m(x) \\ \frac{\partial}{\partial x}b(x,y) &= m(x) + xm'(x).\end{aligned}$$

Nun muss $\frac{\partial}{\partial y}a(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}b(x,y)$ gelten, also

$$\begin{aligned}2m(x) &= m(x) + xm'(x) \\ m(x) &= x \frac{dm}{dx} \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int \frac{1}{m} dm \\ \ln x + C &= \ln m \\ m &= \tilde{C}x.\end{aligned}$$

Da nur ein integrierender Faktor gesucht ist, kann man $\tilde{C} = 1$ setzen; damit ist $m(x) = x$. Ein erstes Integral berechnet man durch Integration von a und b :

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int (2xy - 3x^2 + 2x) dx = x^2y - x^3 + x^2 + C(y) \\ \Phi(x,y) &= \int x^2 dy = x^2y + C(x).\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt das

$$\Phi(x,y) = x^2y - x^3 + x^2.$$