

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (13. Dezember 2013)

Gruppe bunt (*mit Lösung*)

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
Σ (max. 30)		

Aufgabe 1.

Alexander benutzt einen Wanderweg entlang der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ mit $0 \leq t \leq 3$.

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ sowie die Position von Alexander zum Zeitpunkt $t = 2$ (wo er eine kurze Pause eingelegt hat) sind bekannt:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ die Alexander entlang wandert mittels $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{r}(2)$!
- Alexander ist zum Zeitpunkt $t = 1$ erschöpft und fragt seine Kollegen, wie lang der Restweg ist. Das Ziel befindet sich bei $t = 3$. (Berechnen Sie den Weg entlang der Bahnkurve vom Zeitpunkt $t = 1$ bis $t = 3$).
- Zum Zeitpunkt $t = 2$ schießt Alexander eine Signalarakete genau *gegen* seine Bewegungsrichtung ab, wobei die Bewegung als geradlinig und gleichförmig angesehen werden kann. Der Betrag der Geschwindigkeit der Rakete ab dem Abschusszeitpunkt beträgt $|\mathbf{v}_{\text{Rakete}}| = 200$. Geben Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}_{\text{Rakete}}$ der Rakete an.
- Wo durchstößt die Rakete die Ebene $8x + y - 2z = -6\sqrt{2}$?

LÖSUNG

- Die Bahnkurve zum Zeitpunkt t ergibt sich durch Integration des Geschwindigkeitsvektors unter Ausnutzung der bekannten Position an $t = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt \\ -\frac{\pi}{2} \int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt \end{pmatrix} = \left[\text{Substitution } w = \frac{\pi}{4}t \right] = \begin{pmatrix} -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}(2) &= \begin{pmatrix} -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \implies \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und somit also } \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sqrt{2} \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Der Weg entlang der Bahnkurve ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{\pi^2}{4} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{\pi^2}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \\ \mathbf{s}(t) &= \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)| dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot (3 - 1) = \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

c) Die Bewegungsrichtung von Alexander zeigt in dieselbe Richtung wie

$$\mathbf{v}(t=2) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der normierte Vektor, der die Bewegungsrichtung angibt, lautet daher

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist der Geschwindigkeitsvektor der Rakete $\mathbf{v}_{\text{Rakete}}$ gegeben durch

$$\mathbf{v}_{\text{Rakete}} = -200 \cdot \mathbf{v}_1 = 100\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Bahnkurve $\mathbf{r}_{\text{Rakete}}(t)$ ergibt sich zu

$$\mathbf{r}_{\text{Rakete}}(t) = \mathbf{r}(t=2) + (t-2)\mathbf{v}_{\text{Rakete}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + (t-2)100\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Den Durchstoßpunkt mit der Ebene $8x + y - 2z = -6\sqrt{2}$ erhält man durch Einsetzen,

$$\mathbf{r}_{\text{Rakete}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

$$\implies 8\left(\sqrt{2} - (t-2)100\sqrt{2}\right) + (t-2)100\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} - 7(t-2)100\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$$

$$8 - 1400(t-2) = -12$$

$$70(t-2) = 1$$

$$t = 2 + \frac{1}{70} = \frac{141}{70}$$

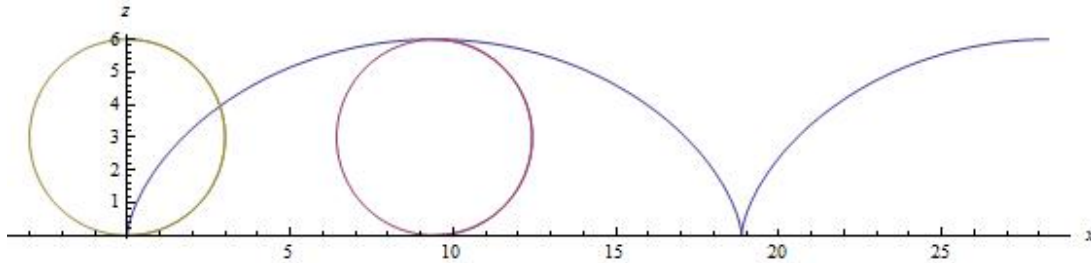
$$\implies \mathbf{r}_{\text{Rakete}}\left(t = \frac{141}{70}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}\sqrt{2} \\ \frac{10}{7}\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

Ein Drahring mit Radius $R = 3$ cm wird auf einer reibungsfreien Unterlage gerollt. Die Bahn eines Massepunkts, der auf dem Reifen sitzt, ist gegeben als:

$$\mathbf{r}_1(t) = 3 \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 0 \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \text{ cm}, \quad t > 0.$$

Beachten Sie folgende Skizze des Problems (Der Reifen wurde zu zwei Zeitpunkten eingezeichnet, er dreht sich im Uhrzeigersinn.)



a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit ($\mathbf{v}(t)$) des Massenpunkts und die mittlere Geschwindigkeit ($\bar{\mathbf{v}}$) des Massenpunkts zwischen zwei Bodenberührungen.

b) Geben Sie den Drehimpuls bezogen auf den Koordinatenursprung an.

Hinweis: Beachten Sie, dass gilt:

$$\mathbf{L}(t) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)).$$

c) Betrachten Sie nun den Drahring selbst, welcher die Parameterdarstellung $\mathbf{r}_2(s)$ besitzt,

$$\mathbf{r}_2(s) = \begin{pmatrix} 3 \sin s \\ 0 \\ 3 + 3 \cos s \end{pmatrix} \text{ cm}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Der Draht wiegt 3 g/cm und befindet sich in einem in die negative z -Richtung wirkenden Gravitationsfeld ($g = 981 \text{ cm/s}^2$). Geben Sie einen Ausdruck für die potentielle Energie des Drahtstücks pro Zentimeter in Abhängigkeit des Parameters s an.

Hinweis: Die potentielle Energie ergibt sich zu $E = mgh$, wobei h der Abstand zwischen einem Punkt und der (x, y) - Ebene ist.

d) Berechnen Sie die gesamte potentielle Energie des Drahrings (in Joule, $1 \text{ J} = 10^7 \text{ g cm}^2/\text{s}^2$).

LÖSUNG

a) Die erste Bodenberührung findet zum Zeitpunkt $t = 2\pi$ statt. Daher ergeben sich die gesuchten Geschwindigkeiten zu:

$$\mathbf{v}(t) = 3 \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{r}_1(2\pi) - \mathbf{r}_0(0)}{2\pi} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechne den Drehimpuls über das Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) \\ &= m \begin{pmatrix} 3t - 3 \sin t \\ 0 \\ 3 - 3 \cos t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 - 3 \cos t \\ 0 \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} 0 \\ -9t \sin(t) + 9 \sin(t)^2 + 9 - 9 \cos(t) - 9 \cos(t) + 9 \cos(t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -9m\mathbf{e}_y(t \sin(t) - 2 + 2 \cos(t)). \end{aligned}$$

c) Die potentielle Energie, die ein Zentimeter des Drahts besitzt, beträgt:

$$\begin{aligned} E(s) &= mgz(s) \\ &= 3 \text{ g/cm} \cdot 981 \text{ cm/s}^2 \cdot (1 + \cos s) \cdot 3 \text{ cm} \\ &= 0,0008829 \cdot (1 + \cos s) \text{ J/cm}. \end{aligned}$$

d) Die potentielle Energie des gesamten Drahts ergibt sich zu:

$$\mathbf{r}'_2(s) = \begin{pmatrix} 3 \cos s \\ 0 \\ -3 \sin s \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{r}'_2(s)| = \sqrt{9 \cos^2 s + 9 \sin^2 s} = 3.$$

$$\begin{aligned} \int_C E ds &= \int_0^{2\pi} E(s) \cdot |\mathbf{r}'(s)| ds \\ &= 0,0008829 \int_0^{2\pi} (1 + \cos s) \cdot 3 ds = \\ &= 0,0026487 \cdot (s + \sin s) \Big|_0^{2\pi} = 0,0052974\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{pot} = 5,2974\pi \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Aufgabe 3.

Gegeben sei das Feld

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 + \sin y \\ 2x^3y + x \cos y \end{pmatrix}.$$

Nehmen Sie als bekannt an, dass \mathbf{F} ein Gradientenfeld ist.

- Machen Sie sich die Tatsache, dass \mathbf{F} ein Gradientenfeld ist, durch Überprüfen der Integrabilitätsbedingung plausibel.
- Gegeben sind Punkte $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (2, 1)$, $P_4 = (2, 0)$. Durch Zusammenfügen der geradlinigen Strecken $\overrightarrow{P_4P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ entsteht eine Kurve C von P_4 nach P_1 (*Skizze!*).
 - Geben Sie eine Parametrisierung von C an.
 - Berechnen Sie das Kurvenintegral von \mathbf{F} entlang C .
- Gegeben sei eine Kurve \tilde{C} mit der Parametrisierung

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} + \cos t \\ \frac{\pi}{4} + \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Berechnen Sie $\tilde{\mathbf{r}}(0)$ und $\tilde{\mathbf{r}}(2\pi)$ und geben Sie den Wert des Kurvenintegrals von \mathbf{F} entlang dieser Kurve \tilde{C} an!

LÖSUNG

- Die Integrabilitätsbedingung für \mathbf{F} lautet

$$\frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_y(x, y). \quad (1)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y) &= 6x^2y + \cos y, \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y(x, y) &= 6x^2y + \cos y \end{aligned}$$

ist (1) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

- Eine mögliche Parametrisierung $\mathbf{r}_1(t)$ für die Strecke $\overrightarrow{P_4P_3}$ ist

$$\mathbf{r}_1(t) = P_4 + t(P_3 - P_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Analog erhält man Parametrisierungen $\mathbf{r}_2(t)$ und $\mathbf{r}_3(t)$ für $\overrightarrow{P_3P_2}$ bzw. $\overrightarrow{P_2P_1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2(t) &= P_3 + t(P_2 - P_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_3(t) &= P_2 + t(P_1 - P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Will man eine Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$ der gesamten Kurve C , müssen die einzelnen Strecken geschickt zusammengefügt werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_2(t - 1), & t \in [1, 2], \\ \mathbf{r}_3(t - 2), & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

ii) Das Kurvenintegral von \mathbf{F} entlang C ist definiert durch

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Da aber \mathbf{F} ein Gradientenfeld ist, hängt der Wert des Kurvenintegrals nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab und wir können die (relativ umständliche) Berechnung des obigen Integrals umgehen, indem wir statt C die direkte Verbindung von P_4 mit P_1 , also die Strecke $\overrightarrow{P_4P_1}$ wählen. Deren Parametrisierung ist (zum Beispiel)

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = P_4 + t(P_1 - P_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Damit ergibt sich

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\overrightarrow{P_4P_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}(t)) \cdot \hat{\mathbf{r}}'(t) dt = \int_0^1 \underbrace{\mathbf{F}(2-t, 0)}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Bemerkung: Alternativ kann das Kurvenintegral (durch die Tatsache dass $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ ein Gradientenfeld ist) über das Potential $\Phi(x, y) = x^3y^2 + x \sin y$ berechnet werden mit:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}(t)) \cdot \hat{\mathbf{r}}'(t) dt = \Phi(\hat{\mathbf{r}}(1)) - \Phi(\hat{\mathbf{r}}(0)) = 0.$$

c)

$$\tilde{\mathbf{r}}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} + 1 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(2\pi) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} + 1 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Die Tatsache, dass \tilde{C} eine geschlossene Kurve in einem Gradientenfeld \mathbf{F} ist, lässt schlussfolgern, dass der Wert des Kurvenintegrals 0 ergibt.