Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2013/14

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (13. Dezember 2013)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

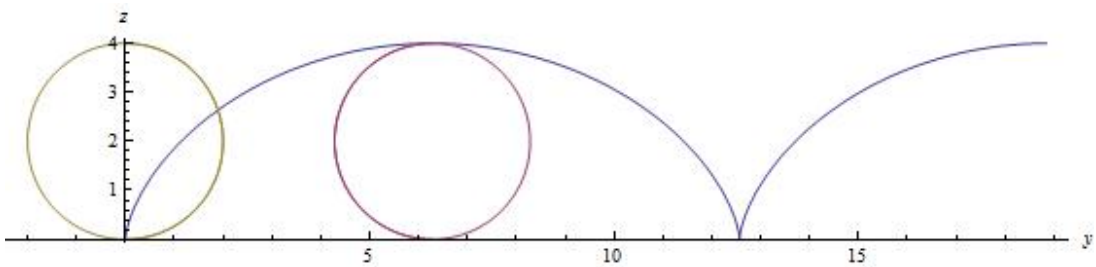
(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

Ein Drahtring mit Radius $R = 2\,\mathrm{cm}$ wird auf einer reibungsfreien Unterlage gerollt. Die Bahn eines Massepunkts, der auf dem Reifen sitzt, ist gegeben als:

$$\mathbf{r}_1(t) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}\mathrm{cm}, \qquad t > 0.$$

Beachten Sie folgende Skizze des Problems (Der Reifen wurde zu zwei Zeitpunkten eingezeichnet, er dreht sich im Uhrzeigersinn.)



a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit ($\mathbf{v}(t)$) des Massenpunkts und die mittlere Geschwindigkeit ($\bar{\mathbf{v}}$) des Massenpunkts zwischen zwei Bodenberührungen.

b) Geben Sie den Drehimpuls bezogen auf den Koordinatenursprung an.

Hinweis: Beachten Sie, dass gilt:

$$\boldsymbol{L}(t) = m(\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{v}(t)).$$

c) Betrachten Sie nun den Drahtring selbst, welcher die Parameterdarstellung $\mathbf{r}_2(s)$ besitzt,

$$\mathbf{r}_2(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin s \\ 2 + 2\cos s \end{pmatrix}\mathrm{cm}, \qquad 0 \le s \le 2\pi.$$

Der Draht wiegt $5\,\mathrm{g/cm}$ und befindet sich in einem in die negative z-Richtung wirkenden Gravitationsfeld ($g = 981\ \mathrm{cm/s^2}$). Geben Sie einen Ausdruck für die potentielle Energie des Drahtstücks pro Zentimeter in Abhängigkeit des Parameters s an.

Hinweis: Die potentielle Energie ergibt sich zu $E = mgh$, wobei h der Abstand zwischen einem Punkt und der (x, y) - Ebene ist.

d) Berechnen Sie die gesamte potentielle Energie des Drahtrings (in Joule, $1\ \mathrm{J} = 10^7\ \mathrm{g\,cm^2/s^2}$).

LÖSUNG

a) Die Bodenberührung findet zum Zeitpunkt $t = 2\pi$ statt. Daher ergeben sich die gesuchten Geschwindigkeiten zu:

$$\mathbf{v}(t) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{r}_1(2\pi) - \mathbf{r}_1(0)}{2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechne den Drehimpuls über das Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(t) &= m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) \\
&= m\begin{pmatrix} 0 \\ 2t - 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \\
&= m\begin{pmatrix} 4t\sin(t) - 4\sin(t)^2 - 4 + 4\cos(t) + 4\cos(t) - 4\cos(t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 4m\mathbf{e}_x(t\sin(t) - 2 + 2\cos(t)).
\end{aligned}$$

c) Die potentielle Energie, die ein Zentimeter des Drahts besitzt, beträgt:

$$\begin{aligned}
E(s) &= mgz(s) \\
&= 5\,\mathrm{g/cm} \cdot 981\,\mathrm{cm/s^2} \cdot (1 + \cos s) \cdot 2\,\mathrm{cm} \\
&= 0,000981 \cdot (1 + \cos s)\,\mathrm{J/cm}.
\end{aligned}$$

d) Die potentielle Energie des gesamten Drahts ergibt sich zu:

$$\mathbf{r}_2'(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos s \\ -2\sin s \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{r}_2'(s)| = \sqrt{4\cos s^2 + 4\sin s^2} = 2.$$

$$\begin{aligned}
\int_C E\,ds &= \int_0^{2\pi} E(s) \cdot |\mathbf{r}'(s)|\,ds \\
&= 0,000981 \int_0^{2\pi} (1 + \cos s) \cdot 2\,ds = \\
&= 0,001962 \cdot (s + \sin s)\Big|_0^{2\pi} = 0,003924\pi
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow E_{pot} = 3,924\pi \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}.$$

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Feld

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 + \sin y \\ 2x^3y + x\cos y \end{pmatrix}.$$

Nehmen Sie als bekannt an, dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist.

a) Machen Sie sich die Tatsache, dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist, durch Überprüfen der Integrabilitätsbedingung plausibel.

b) Gegeben sind Punkte $P_1 = (1,0), P_2 = (1,1), P_3 = (2,1), P_4 = (2,0)$. Durch Zusammenfügen der geradlinigen Strecken $\overrightarrow{P_4P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ entsteht eine Kurve C von P_4 nach P_1 (*Skizze!*).

   i) Geben Sie eine Parametrisierung von C an.

   ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ entlang C.

c) Gegeben sei eine Kurve $\tilde{C}$ mit der Parametrisierung

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 2\cos t \\ 4 + 2\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Berechnen Sie $\tilde{\mathbf{r}}(0)$ und $\tilde{\mathbf{r}}(2\pi)$ und geben Sie den Wert des Kurvenintegrals von $\mathbf{F}$ entlang dieser Kurve $\tilde{C}$ an!

LÖSUNG

a) Die Integrabilitätsbedingung für $\mathbf{F}$ lautet

$$\frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y). \tag{1}$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y) = 6x^2y + \cos y,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y) = 6x^2y + \cos y$$

ist (1) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

b) i) Eine mögliche Parametrisierung $\mathbf{r_1}(t)$ für die Strecke $\overrightarrow{P_4P_3}$ ist

$$\mathbf{r_1}(t) = P_4 + t(P_3 - P_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

Analog erhält man Parametrisierungen $\mathbf{r_2}(t)$ und $\mathbf{r_3}(t)$ für $\overrightarrow{P_3P_2}$ bzw. $\overrightarrow{P_2P_1}$:

$$\mathbf{r_2}(t) = P_3 + t(P_2 - P_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

$$\mathbf{r_3}(t) = P_2 + t(P_1 - P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Will man eine Parametrisierung $\mathbf{r}(t)$ der gesamten Kurve C, müssen die einzelnen Strecken geschickt zusammenfügt werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r_1}(t), & t \in [0,1], \\ \mathbf{r_2}(t-1), & t \in [1,2], \\ \mathbf{r_3}(t-2), & t \in [2,3]. \end{cases}$$

ii) Das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ entlang C ist definiert durch

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Da aber $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist, hängt der Wert des Kurvenintegrals nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab und wir können die (relativ umständliche) Berechnung des obigen Integrals umgehen, indem wir statt C die direkte Verbindung von P_4 mit P_1, also die Strecke $\overrightarrow{P_4P_1}$ wählen. Deren Parametrisierung ist (zum Beispiel)

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = P_4 + t(P_1 - P_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Damit ergibt sich

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\overrightarrow{P_4P_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}(t)) \cdot \hat{\mathbf{r}}'(t)\, dt = \int_0^1 \underbrace{\mathbf{F}(2-t,0)}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0\, dt = 0.$$

Bemerkung: Alternativ kann das Kurvenintegral (durch die Tatsache, dass $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ ein Gradientenfeld ist) über das Potential $\Phi(x,y) = x^3y^2 + x\sin y$ berechnet werden mit:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}(t)) \cdot \hat{\mathbf{r}}'(t)\, dt = \Phi(\hat{\mathbf{r}}(1)) - \Phi(\hat{\mathbf{r}}(0)) = 0.$$

c)

$$\tilde{\mathbf{r}}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(2\pi) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Tatsache, dass $\tilde{C}$ eine geschlossene Kurve in einem Gradientenfeld $\mathbf{F}$ ist, lässt schlussfolgern, dass der Wert des Kurvenintegrals 0 ergibt.

Aufgabe 3.

Claudia fliegt entlang eines bestimmten Weges mittels der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ mit $0 \leq t \leq 3$.
Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ sowie die Position von Claudia beim zweiten Checkpoint zum Zeitpunkt $t = 2$ sind bekannt:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ die Claudia entlang wandert mittels $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{r}(2)$!

b) Claudia erreicht zum Zeitpunkt $t = 1$ den ersten Checkpoint und will wissen wie lang der Restweg ist. Das Ziel befindet sich bei $t = 3$. *(Berechnen Sie den Weg entlang der Bahnkurve vom Zeitpunkt $t = 1$ bis $t = 3$).*

c) Zum Zeitpunkt $t = 2$ schießt das Fleugzeug beim zweiten Checkpoint eine Signalrakete genau *gegen* ihre Bewegungsrichtung ab, wobei die Bewegung als geradlinig und gleichförmig angenommen werden kann. Der Betrag der Geschwindigkeit der Rakete ab dem Abschusszeitpunkt beträgt $|\mathbf{v}_{\text{Rakete}}| = 200$. Geben Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}_{\text{Rakete}}(t)$ an.

d) Wo durchstößt die Rakete die Ebene $8x + y - 2z = -10\sqrt{2}$?

LÖSUNG

a) Die Bahnkurve zum Zeitpunkt t ergibt sich durch Integration des Geschwindigkeitsvektors unter Ausnutzung der bekannten Position an $t = 2$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \\ \frac{\pi}{2}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \end{pmatrix} = \left[\text{Substitution } w = \frac{\pi}{4}t\right] = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und somit also } \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - \sqrt{2} \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}.$$

b) Der Weg entlang der Bahnkurve ergibt sich zu:

$$|\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2},$$

$$\mathbf{s}(t) = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)|\ dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot (3 - 1) = \sqrt{2}\pi.$$

c) Die Bewegungsrichtung von Claudia zeigt in dieselbe Richtung wie

$$\mathbf{v}(t=2) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der normierte Vektor, der die Bewegungsrichtung angibt, lautet daher

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist der Geschwindigkeitsvektor der Rakete $\mathbf{v}_{\text{Rakete}}$ gegeben durch

$$\mathbf{v}_{\text{Rakete}} = -200 \cdot \mathbf{v}_1 = 100\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Bahnkurve $\mathbf{r}_{\text{Rakete}}(t)$ ergibt sich zu

$$\mathbf{r}_{\text{Rakete}}(t) = \mathbf{r}(t=2) + (t-2)\mathbf{v}_{\text{Rakete}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + (t-2)100\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Den Durchstoßpunkt mit der Ebene $8x + y - 2z = -10\sqrt{2}$ erhält man durch Einsetzen:

$$\mathbf{r}_{\text{Rakete}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow 8(-\sqrt{2} + (t-2)100\sqrt{2}) + (-(t-2)100\sqrt{2}) - 2\cdot 2\sqrt{2} &= -10\sqrt{2} \\
-12\sqrt{2} + 7(t-2)100\sqrt{2} &= -10\sqrt{2} \\
-24 + 1400(t-2) &= -20 \\
1400(t-2) &= 4 \\
350(t-2) &= 1 \\
t &= \frac{1}{350} + 2 = \frac{701}{350}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{r}_{\text{Rakete}}\left(t = \frac{701}{350}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{7} \\ \frac{-2\sqrt{2}}{7} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$