

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Haupttest (17. Januar 2014)

Gruppe bunt (*mit Lösung*)

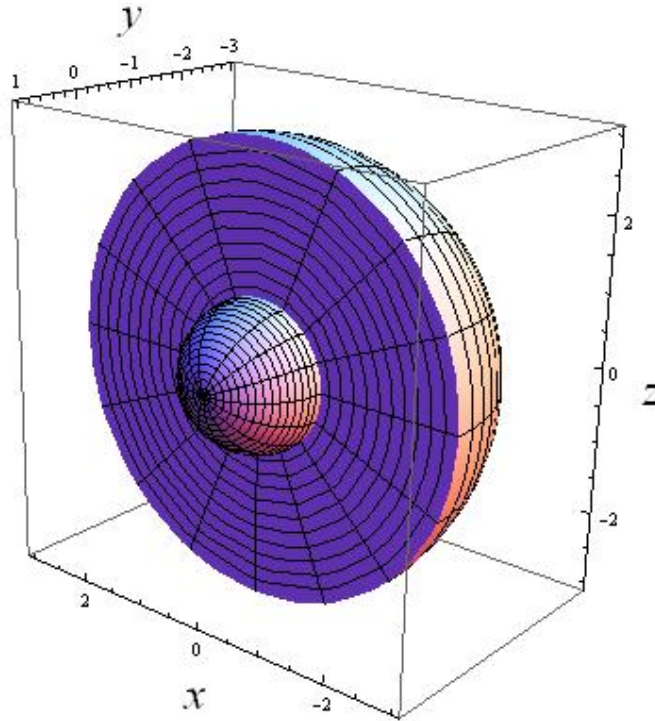
↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
Σ (max. 30)		

Aufgabe 1.

Eine Steh-auf-Puppe aus Holz ($\rho = 0,59 \text{ g/cm}^3$) bestehe aus zwei Halbkugeln mit den Radien $r_1 = 1 \text{ cm}$ und $r_2 = 3 \text{ cm}$ (siehe Skizze).



a) Berechnen Sie die Masse des Objekts mittels Integration!

b) Wo liegt der Schwerpunkt der Puppe?

Hinweis: Es gilt:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{V} \int_K \mathbf{r} dV.$$

LÖSUNG

a) Die Masse des gegebenen Objekts ergibt sich als Summe der Masse der kleineren Halbkugel (m_1) und der Masse der größeren Halbkugel (m_2),

$$m = m_1 + m_2.$$

Die Masse kann mittels eines Volumsintegrals über die Halbkugel ermittelt werden. Dabei wählt man am besten gedrehte Kugelkoordinaten, bei denen die ausgezeichnete Achse mit der ausgezeichneten Achse des Systems (= der y -Achse) übereinstimmt,

$$\begin{aligned} y &= r \cos(\theta), \\ x &= r \sin(\theta) \cos(\phi), \\ z &= r \sin(\theta) \sin(\phi). \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante dieses Koordinatensystems ist dieselbe wie jene von Kugelkoordinaten. Daraus ergeben sich die Massen zu:

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho \int_0^{r_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \\ &= \rho \cdot 2\pi \frac{r_1^3}{3} (-\cos(\theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \rho \frac{2\pi r_1^3}{3}, \\ m_2 &= \rho \int_0^{r_2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi = \rho \frac{2\pi r_2^3}{3}. \end{aligned}$$

Schließlich erhält man

$$m = \rho \frac{2\pi}{3} (r_1^3 + r_2^3) = 0,59 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 28 \text{ g}.$$

Bemerkung: Wenn man die Formel für das Volumen einer Kugel kennt ($V_K = \frac{4\pi r^3}{3}$), folgt daraus direkt die Masse des Objekts:

$$m = \rho \frac{V_{K1}}{2} + \rho \frac{V_{K2}}{2} = \rho \frac{2\pi}{3} (r_1^3 + r_2^3) = 0,59 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 28 \text{ g} = 34.599 \text{ g}.$$

- b) Wie man aus der Skizze entnehmen kann, ist die Massenverteilung des Objekts in x - und z -Richtung völlig symmetrisch. Daraus folgt direkt

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Position des Schwerpunkts entlang der y -Achse, verwendet man am besten wieder gedrehte Kugelkoordinaten, bei denen die y -Achse ausgezeichnet ist, siehe a).

Bei der Berechnung von S_y zerfällt der Integrationsbereich in eine Integration über die kleinere Kugel (K_1) und in eine Integration über die größere Kugel (K_2).

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{1}{V} \left(\int_{K_1} y dV + \int_{K_2} y dV \right) \\ &= \frac{1}{V} \left(\int_0^{r_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r \cos(\theta) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi + \int_0^{r_2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} r \cos(\theta) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \right) \\ &= \frac{2\pi}{V} \left(\frac{r_1^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta + \frac{r_2^4}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta &= \left| u = \cos(\theta) \right| = - \int_1^0 u du = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}, \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta &= \left| u = \cos(\theta) \right| = - \int_0^{-1} u du = \int_{-1}^0 u du = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

folgt daraus

$$S_y = \frac{2\pi}{V} \left(\frac{r_1^4}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{r_2^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4V} (1^4 - 3^4) \text{ cm}^4 = -\frac{80\pi}{4V} \text{ cm}^4 = -\frac{20\pi}{V} \text{ cm}^4.$$

Das Endergebnis erhält man unter Verwendung von $V = \frac{m}{\rho}$:

$$S_y = -\frac{80\pi}{112 \cdot \frac{2\pi}{3}} \text{ cm} = -\frac{15}{14} \text{ cm}.$$

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(\frac{2}{3}x^3 + 2yx\right) dx - 2x^2 dy = 0.$$

- Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist.
- Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $a(x)$.
- Lösen Sie obige Differentialgleichung unter Verwendung der Methoden zur Lösung exakter Differentialgleichungen und verifizieren Sie die von Ihnen gefundene Lösung $y(x)$ durch Einsetzen.
- Berechnen Sie die spezielle Lösung, welche die Bedingung $y(2) = 0$ erfüllt.

LÖSUNG

- a) Durch Vergleich mit $p(x, y) + q(x, y)y'(x) = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}p(x, y) &= \frac{2}{3}x^3 + 2xy, \\q(x, y) &= -2x^2.\end{aligned}$$

Einsetzen in die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ ergibt:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -4x \neq 2x.$$

Diese Differentialgleichung ist nicht exakt.

- b) Man soll einen Faktor $a(x)$ bestimmen, so dass folgende Differentialgleichung exakt ist:

$$a(x)p(x, y) dx + a(x)q(x, y) dy = 0.$$

Es muss also gelten $\frac{\partial p \cdot a}{\partial y} = \frac{\partial q \cdot a}{\partial x}$:

$$\frac{\partial(pa)}{\partial y} = 2xa(x), \quad \frac{\partial(qa)}{\partial x} = -4xa(x) + (-2x^2)a'(x).$$

Man kann nun eine Differentialgleichung 1. Ordnung aufstellen, welche mittels Separation der Variablen gelöst werden kann:

$$\begin{aligned}2xa(x) &= -4xa(x) - 2x^2a'(x) \\-\frac{3}{x}a(x) &= a'(x) \\ \frac{da}{a} &= -\frac{3 dx}{x} \\ \ln(a) &= -3 \ln(x) \\ a(x) &= \frac{1}{x^3}.\end{aligned}$$

c) Man löst die eben ermittelte exakte Differentialgleichung $(\frac{2}{3} + 2\frac{y}{x^2}) - \frac{2}{x}y'(x) = 0$, indem man das Potential $\Phi(x, y)$ bestimmt:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int \left(\frac{2}{3} + 2\frac{y}{x^2} \right) dx + C(y) = \frac{2}{3}x - \frac{2y}{x} + C(y) \\ \Phi(x, y) &= \int -\frac{2}{x} dy + C(x) = -\frac{2y}{x} + C(x) \\ \implies \Phi(x, y) &= \frac{2}{3}x - \frac{2y}{x}.\end{aligned}$$

Mögliche Lösungen liegen entlang der Äquipotentiallinien:

$$\frac{2}{3}x - \frac{2y}{x} = C \implies y = -\frac{x \cdot C}{2} + \frac{x^2}{3}.$$

Probe durch Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung:

$$\frac{2}{3}x^3 + \left(-Cx + \frac{2}{3}x^2 \right) x - 2x^2 \left(-\frac{C}{2} + \frac{2x}{3} \right) = 0.$$

d) Die gesuchte spezielle Lösung ergibt sich zu:

$$y(2) = 0 \implies -C + \frac{4}{3} = 0 \implies y(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{3}.$$

Aufgabe 3.

Ein gedämpfter linearer Oszillator bestehe aus einer punktförmigen Masse $m = 1$ kg, die an einer Feder hängt, welche durch die Federkonstante $k = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ und die Dämpfungskonstante $r = 2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ charakterisiert ist. Eine auslenkende Kraft $f(t) = 26e^{-3t}$ N wirke auf die Masse.

- Geben Sie die Differentialgleichung an, welche dieses System beschreibt.
- Bestimmen Sie die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und überprüfen Sie, dass diese ein Fundamentalsystem bilden.
- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
Hinweis: Machen Sie für die Partikulärlösung einen Ansatz, der bezüglich seiner Struktur der Inhomogenität ähnelt.
- Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $u(0) = u_0 = 1$ m, $\dot{u}(0) = v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

LÖSUNG

- Man erhält die Differentialgleichung, indem man ein Kräftegleichgewicht für dieses System aufstellt (siehe auch Skript Formel (5.30)),

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(t) &= -ku(t) - r\dot{u}(t) + f(t) \\ \ddot{u} &= -10u - 2\dot{u} + 26e^{-3t} \\ \ddot{u} + 2\dot{u} + 10u &= 26e^{-3t}. \end{aligned}$$

- Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\ddot{u} + 2\dot{u} + 10u = 0$ ergibt sich wegen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{10} \text{ s}^{-1}, \quad \rho = \frac{r}{2m} = 1 \text{ s}^{-1} \quad \implies \quad \rho < \omega_0,$$

zu

$$\begin{aligned} u_h(t) &= e^{-\rho t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)), \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} = 3 \text{ s}^{-1} \\ \implies u_h(t) &= e^{-t} (C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)). \end{aligned}$$

Die Fundamentalmatrix des Systems lautet

$$Y = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(3t) & e^{-t} \sin(3t) \\ -e^{-t} \cos(3t) - 3e^{-t} \sin(3t) & -e^{-t} \sin(3t) + 3e^{-t} \cos(3t) \end{pmatrix}$$

Damit ein Fundamentalsystem vorliegt, muss gelten $\det(Y) \neq 0 \forall t > 0$.

$$\det(Y) = -e^{-2t} \cos(3t) \sin(3t) + 3e^{-2t} \cos(3t)^2 + e^{-2t} \cos(3t) \sin(3t) + 3e^{-2t} \sin(3t)^2 = 3e^{-2t}.$$

Die Exponentialfunktion ist, unabhängig vom Argument, immer positiv. Es liegt also tatsächlich ein Fundamentalsystem vor.

c) Für die Partikulärlösung kann man folgenden Ansatz verwenden:

$$u_p(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 2\lambda Ce^{\lambda t} + 10Ce^{\lambda t} &= 26e^{-3t} \implies \lambda = -3 \\ 9Ce^{-3t} - 6Ce^{-3t} + 10Ce^{-3t} &= 26e^{-3t} \\ 13C &= 26 \implies C = 2.\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = e^{-t}(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)) + 2e^{-3t}.$$

d) Ermittle die Lösung des Anfangswertproblems:

$$u(0) = C_1 + 2 = 1 \quad \rightarrow C_1 = -1.$$

Unter Verwendung von

$$\dot{u}(t) = C_1(-e^{-t} \cos(3t) - 3e^{-t} \sin(3t)) + C_2(-e^{-t} \sin(3t) + 3e^{-t} \cos(3t)) - 6e^{-3t}$$

erhält man weiters:

$$\dot{u}(0) = 3C_2 - 5 = 0 \implies C_2 = \frac{5}{3}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich zu:

$$u(t) = e^{-t} \left(-\cos(3t) + \frac{5}{3} \sin(3t) \right) + 2e^{-3t}.$$