Num. Lösung von DGLen (1)

Differentialgleichung für exponentielles Wachstum:
Änderung der Population proportional zu deren Größe:

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t), \qquad t > 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Lösung gegeben durch

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} y_0.$$

Numerische Approximation: Endliches Gitter
$(t_0 = 0, t_1 = h, \ldots, t_N = t_{\text{end}})$.

Ersetze Ableitung durch Differenzenquotient
(oder Approximation höherer Ordnung),

$$\dot{y}(t_i) \approx \frac{1}{t_{i+1} - t_i}(y_{i+1} - y_i) = \lambda y_i, \qquad i = 0, \ldots, N-1.$$

Num. Lösung von DGLen (2)

Löse Rekursion:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 = R^i(h\lambda) y_0.$$

Es gilt

$$\mathrm{e}^z - R(z) = O(z^2), \qquad z \to 0.$$

Lineare Stabilität, $\Re(\lambda) < 0$: $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} y_0 \to 0$ für $t \to \infty$.
Gewünscht: $|R(z)| < 1$ für $\Re(\lambda) < 0$ (für $|z| < M$).
Bewirkt Einschränkung an $h\lambda \rightsquigarrow$ *Stabilitätsgebiet*.
Bessere Stabilität für *implizite Verfahren*: Impl. Euler

$$\dot{y}(t_i) \approx \frac{1}{t_{i+1} - t_i}(y_{i+1} - y_i) = \lambda y_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, N-1.$$

$R(z) = \frac{1}{1-z} \implies$ Stabilitätsgebiet $= \mathbb{C}^-$. A-Stabilität.

Höhere Ordnung

Approximation der rechten Seite,

$$\frac{1}{t_{i+1}-t_i}(y_{i+1}-y_i) = \lambda \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell y_{i,\ell},$$

Runge–Kutta Verfahren.

(Zusätzlich:) Bessere Approximation von $\dot{y}$,

$$\dot{y}(t_i) \approx \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \sum_{j=1}^{l} b_j y_{i+j} = \lambda \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell y_{i+\ell},$$

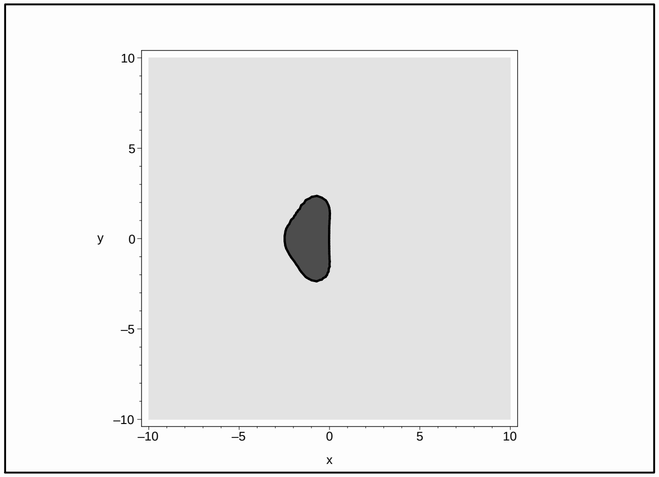
lineare Mehrschrittverfahren.

Stabilitätsgebiete

Runge–Kutta Verfahren:

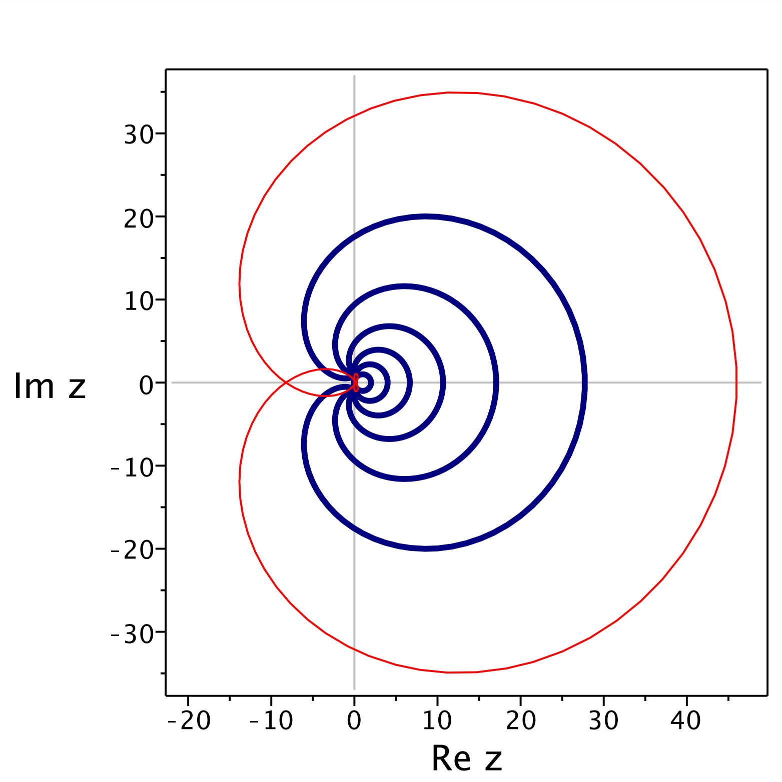
Explizites Verfahren dritter Ordnung (von Fehlberg):

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.$$



Stabilitätsgebiete (2)

BDF (Backward Differentiation Formulae):



Stabil *ausserhalb der Kurven*!

Konvergenz

Schreibe

$$F_h(y_h)_i := \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \lambda y_i, \qquad i = 0, \ldots, N-1.$$

Dann ist

$$F_h(y_h) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ (-\frac{1}{h} - \lambda) & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & (-\frac{1}{h} - \lambda) & \frac{1}{h} \end{pmatrix} y_h.$$

Offensichtlich ist F_h diagonaldominant für $|1 + h\lambda| < 1$, also im Stabilitätsgebiet.

Außerdem: $\left\| F_h^{-1} \right\| = O(1)$ (Bidiagonalmatrix). Stabilität

Konvergenz (2)

Exakte Lösung $y(t) \rightsquigarrow$

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - h\lambda y(t_i) = \frac{h}{2}\ddot{y}(\xi) = \frac{h\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{\lambda\xi}.$$

Konsistenz.

Es folgt

$$\|y - y_h\| = \|F_h^{-1}(F_h(y) - F_h(y_h))\| \le \left\|F_h^{-1}\right\| \|F_h(y)\| = O(h).$$

"Stabilität + Konsistenz $\Longrightarrow$ Konvergenz".

Verfahren höherer Ordnung: $\|F_h(y)\| = O(h^p)$.