Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2012/13

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (8. März 2013)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— *kein Taschenrechner;* *Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

1. (7 Punkte) Berechnen Sie das Volumsintegral

$$\int_K dV,$$

wobei K der durch die Ungleichungen $x, y, z \geq 0$ und $x + y + z \leq 1$ bestimmte Körper ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

   a) Fertigen Sie eine Skizze des Integrationsbereiches an.

   b) Geben Sie Ungleichungen für die Grenzen Ihrer Integrationsvariablen an.

   c) Berechnen Sie das Integral.

2. (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(3x^2y)\,dx + (x^3 + 2y)\,dy = 0. \tag{1}$$

LÖSUNG

1. a)

   b) Gemäß obiger Skizze kann man ablesen, dass für z gilt:

$$0 \leq z \leq 1.$$

   Bei fest gewähltem z kann für y nur noch

$$0 \leq y \leq 1 - z$$

   gelten. Sind z- und y-Komponente fixiert, so ergibt sich für die x-Komponente der Bereich

$$0 \leq x \leq 1 - z - y.$$

   c) Nach b) sieht das Integral wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\int_K dV &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - z - y)\,dy\,dz \\
&= \int_0^1 \left((1-z)(1-z) - \frac{(1-z)^2}{2} \right) dz \\
&= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2}\,dz = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2. Um die Lösung zu bestimmen wird zuerst $(x^3 + 2y)\,dy$ integriert:

$$\int (x^3 + 2y)\,dy = x^3y + y^2 + C(x). \tag{2}$$

Das wird wieder nach x abgeleitet und mit $3x^2y$ verglichen um die Konstante $C(x)$ zu bestimmen,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y + y^2 + C(x)\right) = 3x^2y + C'(x) \stackrel{!}{=} 3x^2y. \tag{3}$$

Daraus folgt $C'(x) = 0$, die Lösung der DGL ist also gegeben durch $x^3y + y^2 = c$.

Aufgabe 2.

a) (7 Punkte) Die Bahnkurve C eines Massepunktes sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} (\exp(t))^3 \\ \exp(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bestimmen Sie die Parametrisierung von C nach der Bogenlänge sowie die Bogenlänge von C.

b) (3 Punkte) Elektrische Feldlinien $\mathbf{r}(s)$ sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \nabla\Phi(\mathbf{r}(s)),$$

wobei $\Phi(\mathbf{r})$ das elektrostatische Potential ist. Berechnen Sie alle Feldlinien $\mathbf{r}(s)$ für das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}.$$

LÖSUNG

a) Für die Bogenlänge bis $t = \tau$ ist das Integral $\int_C d\mathbf{r} = \int_0^\tau |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt$ zu berechnen. Dabei ist

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3\exp(3t) \\ 2\exp(2t) \end{pmatrix}$$

und

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = (9\exp(6t) + 4\exp(4t))^{1/2} = \exp(2t)\sqrt{9\exp(2t) + 4}.$$

Die Bogenlänge $s(\tau)$ bis $t = \tau$ lautet dann:

$$\begin{aligned} s(\tau) &= \int_0^\tau \exp(2t)\sqrt{9\exp(2t)+4}\, dt = \begin{vmatrix} 9\exp(2t) + 4 = v \\ 18\exp(2t)\, dt = dv \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{18}\int v^{1/2}\, dv = \frac{1}{27}(9\exp(2t)+4)^{3/2}\Big|_{t=0}^{\tau} = \frac{1}{27}\left((9\exp(2\tau)+4)^{3/2} - 13^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Umformen nach $\tau = \tau(s)$ ergibt

$$\tau(s) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(27s + 13^{3/2})^{2/3} - 4}{9}\right)$$

und damit die Parametrisierung $\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(\tau(s))$ nach der Bogenlänge:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \begin{pmatrix} w(s)^{3/2} \\ w(s)^{1/2} \end{pmatrix},$$

mit

$$w(s) = \frac{(27s + 13^{3/2})^{2/3} - 4}{9}.$$

Die Bogenlänge ist $s(1) = \frac{1}{27}\left((9\exp(2) + 4)^{3/2} - 13^{3/2}\right)$.

b)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $\nabla\Phi$ in die Differentialgleichung:

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \nabla\Phi(\mathbf{r}(s)) = \begin{pmatrix} 2x(s) \\ 2y(s) \\ 2z(s) \end{pmatrix}.$$

Das sind drei voneinander unabhängige Differentialgleichungen 1. Ordnung, die idente Form besitzen. $x(s)$ ergibt sich folgendermaßen:

$$\frac{dx}{ds} = 2x$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int 2\,ds$$

$$\ln x + \tilde{A} = 2s$$

$$x(s) = A\exp(2s).$$

Analog sind die Lösungen für die anderen Koordinaten $y(s) = B\exp(2s)$ und $z(s) = C\exp(2s)$. Beachten Sie, dass es drei verschiedene Konstanten gibt, weil die Gleichungen voneinander völlig unabhängig sind. Damit lautet die Lösung:

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \exp(2s).$$

Es handelt sich bei den Feldlinien um Geraden mit dem Richtungsvektor (A, B, C), die bei $s = -\infty$ im Ursprung beginnen und sternförmig auseinandergehen.

Aufgabe 3.

Eine Münze wird 2000 Mal geworfen. Wir vermuten, dass die Münze nicht fair ist. Man teste die Nullhypothese, dass die Münze fair ist, also einer Binomialverteilung $B\left(2000, \frac{1}{2}\right)$ gehorcht. Bei wie wenigen bzw. wie vielen Ergebnissen von 'Kopf' können wir auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ davon ausgehen, dass die Münze nicht fair ist?

*Hinweis: Verwenden Sie den Satz von de Moivre/Laplace. Untenstehend ist eine Wertetabelle für die Standardnormalverteilung angegeben. Dabei ist in den Spalten die zweite Nachkommastelle von z aufgetragen, für die in den Zeilen der Platzhalter * steht.*

z \ *	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1*	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2*	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3*	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4*	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5*	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6*	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7*	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8*	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9*	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0*	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1*	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2*	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3*	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4*	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5*	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6*	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7*	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8*	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9*	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0*	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1*	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2*	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3*	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4*	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5*	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6*	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7*	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8*	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9*	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0*	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900

LÖSUNG

Wir wollen H_0 verwerfen, falls "Kopf" entweder sehr selten oder sehr oft vorkommt, d.h. falls

$$\sum_{k=0}^{\Gamma} P(x=k) \leq 0.025 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=\Delta}^{2000} P(X=k) \leq 0.025.$$

Dabei sind Γ und Δ die größte bzw. kleinste Zahl sodass die Bedingung gilt.
Zuerst zeigen wir, dass beide Bedingungen zusammengefasst werden können:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \begin{pmatrix} 2000 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2000-k} \\ &= \begin{pmatrix} 2000 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{2000} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000-k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{2000-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = P(X=2000-k), \end{aligned}$$

also $\Delta = 2000 - \Gamma$. Zusammengefasst ergeben die Bedingungen

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\Gamma} P(X=k) + \sum_{k=2000-\Gamma}^{2000} P(X=k) \leq 0.05 \qquad \Longleftrightarrow \\ &P(\Gamma+1 \leq X \leq 2000-\Gamma-1) \geq 0.95. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus dem Satz von de Moivre/Laplace folgt

$$P(r \leq X \leq s) \approx \Phi\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right),$$

wobei hier $\mu = np = 1000$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{500}$.
Da sicher gilt $0 \leq \Gamma \leq 999$, ist $\frac{\Gamma+1-1000}{\sqrt{500}} \leq 0$, und damit

$$\Phi\left(\frac{\Gamma-999}{\sqrt{500}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{999-\Gamma}{\sqrt{500}}\right).$$

Äquivalent zu (4) ist also die Forderung (s. Tabelle)

$$\Phi\left(\frac{999-\Gamma}{\sqrt{500}}\right) \geq 0.975 \Longrightarrow \Gamma \leq 999 - 1.96\sqrt{500} \approx 955.17.$$

Das heisst, wir sollten die Hypothese verwerfen falls entweder höchstens 955 Mal oder mindestens 1045 Mal 'Kopf' geworfen wird.