

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Haupttest (21. Jänner 2011)

Gruppe bunt (*mit Lösung*)

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
Σ (max. 30)		

Aufgabe 1. (10 Punkte) Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung

$$\alpha^2 y' = \frac{1 - 2y - 3x^2 y^2}{x^3 y + x + y} \quad (1)$$

1. Geben Sie alle Werte für α an, sodass (1) zu einer exakten Differentialgleichung wird.
2. Setzen Sie nun $\alpha = \sqrt{2}$ in (1) und berechnen Sie ein zugehöriges Skalarfeld $\Phi = \Phi(x, y)$.
3. Bestimmen Sie aus der Gleichung

$$\Phi(x, y) = c, \quad (c = \text{const.})$$

die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung (1).

4. Berechnen Sie nun die Konstante c , sodass die im Punkt 3 erhaltene Lösung durch den Punkt $(0, -1)$ verläuft.

LÖSUNG

1. Wir bestimmen α aus den Integrabilitätsbedingungen.

$$\begin{aligned} p = 3x^2 y^2 + 2y - 1 &\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} p = 6x^2 y + 2 \\ q = \alpha^2 (x^3 y + x + y) &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} q = \alpha^2 (3x^2 y + 1) \end{aligned}$$

Aus der Forderung

$$\frac{\partial}{\partial y} p = \frac{\partial}{\partial x} q$$

ergibt sich $\alpha^2 = 2$ und damit $\alpha = \pm\sqrt{2}$.

2. Wir berechnen $\Phi(x, y)$ indem wir zwei Integrationen wie folgt durchführen.

$$\Phi(x, y) = \int p \, dx = \int (3x^2 y^2 + 2y - 1) \, dx = x^3 y^2 + 2xy - x + D(y),$$

bzw.

$$\Phi(x, y) = \int q \, dy = \int 2(x^3 y + x + y) \, dy = x^3 y^2 + 2xy + y^2 + C(x).$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich daraus

$$-x + D(y) = y^2 + C(x)$$

und weiter $C(x) = -x$ und $D(y) = y^2$. Einsetzen in einem der Ausdrücke für $\Phi(x, y)$ führt zu

$$\Phi(x, y) = y^2(1 + x^3) + 2xy - x.$$

3. Zum Auflösen der Gleichung $\Phi(x, y) = c$ verwenden wir die Lösungsformel für quadratische Gleichungen angewandt auf die Variable y . Das ergibt

$$y_{1,2}(x) = -\frac{x}{1+x^3} \pm \sqrt{\frac{x^2}{(1+x^3)^2} + \frac{x+c}{1+x^3}}. \quad (2)$$

4. Die Bedingung $y(0) = -1$ kann nur durch die Verwendung des negativen Vorzeichens der Wurzel in (2) erzielt werden. Wir erhalten damit die Gleichung

$$-\sqrt{\frac{c}{1}} = -1$$

und somit $c = 1$. Die spezielle Lösung von (1) lautet daher

$$y(x) = -\frac{x}{1+x^3} - \sqrt{\frac{x^2}{(1+x^3)^2} + \frac{x+1}{1+x^3}}.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{1-x} - \frac{1}{x^2-1} \quad x > 1$$

Geben Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ an.

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = 0$$

Geben Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ an und weisen Sie nach, dass ein Fundamentalsystem vorliegt. Bestimmen Sie zusätzlich die Werte der vorhandenen Konstanten, sodass die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 4$ erfüllt sind.

LÖSUNG

a) Die Lösung ergibt sich laut Satz 5.2. Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$y' = \frac{1}{1-x}y = \lambda(x)y$$

Die Ausdrücke

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(\tau) d\tau = -\ln(1-x)$$

$$\Lambda(x) - \Lambda(s) = \ln\left(\frac{1-s}{1-x}\right)$$

$$\int_0^x e^{\Lambda(x)-\Lambda(s)} g(s) ds = \int_0^x \frac{1-s}{1-x} \underbrace{\frac{1}{1-s^2}}_{(1+s)(1-s)} ds' = \frac{1}{1-x} \int_0^x \frac{1}{1+s} ds = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$$

ergeben nach Einsetzen in die Formel für $y(x)$

$$y(x) = C e^{\Lambda(x)} + \int_0^x e^{\Lambda(x)-\Lambda(s)} g(s) ds = \frac{C}{1-x} + \frac{\ln(1+x)}{1-x}$$

b) Charakteristisches Polynom der Gleichung:

$$\lambda^2 + 5\lambda + \frac{25}{4} = 0$$

Lösung der Gleichung mit kleiner Lösungsformel:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$$

Da es sich bei $\lambda = -\frac{5}{2}$ um eine doppelte Nullstelle handelt, gilt der Lösungsansatz für die DGL laut (5.24)

$$C_1 \underbrace{e^{\lambda x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{x e^{\lambda x}}_{y_2(x)} = e^{-\frac{5}{2}x} (C_1 + C_2 x)$$

Nachweis Fundamentalsystem: Wronski-Determinante $\neq 0$ für irgendein x .

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{5}{2}x} & x e^{-\frac{5}{2}x} \\ -\frac{5}{2} e^{-\frac{5}{2}x} & e^{-\frac{5}{2}x} - \frac{5}{2} x e^{-\frac{5}{2}x} \end{pmatrix} = e^{-5x} \left(1 - \frac{5}{2}x \right) + \frac{5}{2} e^{-5x} x = \underbrace{e^{-5x}}_{>0}$$

→ Fundamentalsystem liegt vor.

Erfüllung der Anfangsbedingungen: mit

$$y'(x) = e^{-\frac{5}{2}x} \left(-\frac{5}{2} C_1 - \frac{5}{2} C_2 x + C_2 \right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\rightarrow C_1 = 1 \\ y'(0) = 4 &\rightarrow -\frac{5}{2} + C_2 = 4 \rightarrow C_2 = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte) Der Körper K bestehe aus allen Punkten (x, y, z) , die

$$-1 < z < 2 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < (2 - z)^2 \quad (3)$$

erfüllen und habe die Dichte

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{(2 - z)^2}.$$

Ziel ist die Berechnung des Massenmittelpunkts von K . Gehen Sie dazu schrittweise vor:

- a) Zur Berechnung der Integrale ist eine Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (r, \phi, z)$ der Form

$$x = ar \cos \phi \quad (4)$$

$$y = br \sin \phi \quad (5)$$

$$z = z \quad (6)$$

nützlich. Überlegen Sie, wie a und b zu wählen sind, damit die Ungleichungen (3) nach der Transformation eine besonders einfache Gestalt annehmen. Geben Sie die Ungleichungen für die Grenzen von K in den neuen Variablen (r, ϕ, z) an¹.

- b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation $(x, y, z) \mapsto (r, \phi, z)$.

- c) Der Massenmittelpunkt S von K ist definiert durch die Formel

$$S = \frac{1}{\int_K \rho(x, y, z) dV} \begin{pmatrix} \int_K x \rho(x, y, z) dV \\ \int_K y \rho(x, y, z) dV \\ \int_K z \rho(x, y, z) dV \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie S unter Verwendung der obigen Transformation.

Stellen Sie unbedingt Symmetrieüberlegungen an, um die Rechnungen zu vereinfachen!

LÖSUNG

- a) Setzen wir die Transformationsformeln in die zweite Ungleichung in (3) ein, so erhalten wir

$$\frac{a^2}{4} r^2 \cos^2 \phi + \frac{b^2}{9} r^2 \sin^2 \phi < (2 - z)^2.$$

Also ist die Wahl $a = 2, b = 3$ sinnvoll. Damit ergibt sich für r die Bedingung

$$r^2 < (2 - z)^2,$$

wegen $r > 0$ und $2 - z > 0$ also $0 < r < 2 - z$.

Für z gilt weiterhin $-1 < z < 2$ und ϕ unterliegt keiner Einschränkung, durchläuft also den maximalen Bereich $[0, 2\pi]$.

¹Wie bei herkömmlichen Zylinderkoordinaten verlangen wir, dass r positiv ist und ϕ im Intervall $[0, 2\pi)$ bleibt. Zu bestimmen sind die zusätzlichen Einschränkungen, die sich durch den Integrationsbereich K ergeben.

b) Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jacobimatrix J :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} = \begin{pmatrix} 2 \cos \phi & -2r \sin \phi & 0 \\ 3 \sin \phi & 3r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet

$$\det J = 6r.$$

c) Wir berechnen zuerst das Integral im Nenner:

$$\begin{aligned} \int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 \int_0^{2-z} \rho(r, \phi, z) |\det J| dr dz d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 \int_0^{2-z} \frac{1}{(2-z)^2} 6r dr dz d\phi = \\ &= 12\pi \int_{-1}^2 \frac{1}{(2-z)^2} \left[\int_0^{2-z} r dr \right] dz \end{aligned}$$

Der Wert des Integrals in eckiger Klammer ist gerade $\frac{1}{2}(2-z)^2$, sodass sich insgesamt

$$\int_K \rho dV = 12\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 18\pi$$

ergibt.

Um die Integrale im Zähler zu berechnen, bemerken wir, dass die Massendichte und der Integrationsbereich symmetrisch in x und y sind. Damit muss der Schwerpunkt auf der z -Achse liegen, d.h. die ersten beiden Komponenten von S sind 0.

Mathematisch sieht man das einfach durch Einsetzen, z.B. ist

$$\int_K x \rho(x, y, z) d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 \int_0^{2-z} 2r \cos \phi \frac{1}{(2-z)^2} 6r dr dz d\phi = 0,$$

da $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$.

Zur Berechnung der z -Komponente des Zähler-Integrals transformieren wir analog zu vorher und erhalten

$$\begin{aligned} \int_K z \rho(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 \int_0^{2-z} z \frac{1}{(2-z)^2} 6r dr dz d\phi = \\ &= 12\pi \int_{-1}^2 \frac{z}{(2-z)^2} \left[\int_0^{2-z} r dr \right] dz = \\ &= 6\pi \int_{-1}^2 z dz = \frac{3}{2} 6\pi. \end{aligned}$$

Damit ist

$$S = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} 6\pi \end{pmatrix}}{18\pi} = \frac{1}{2}.$$

